Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский физико-технический институт (ГУ)
Южный Федеральный университет
Государственный морской университет им. адм. Ф. Ф. Ушакова
МОО «Женщины в науке и образовании»
НОУ Учебный центр «Знание»

XXVII Международная конференция Математика. Экономика. Образование.

XI Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения.

27 мая – 3 июня 2020 г.
Пансионат «Моряк» Новороссийского морского пароходства

Материалы

http://conf-symp.sfedu.ru
E-mail: conf-symp@mail.ru

УДК 330.4+504+37 1Л4
XXVII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XI Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Ростов н/Д, 2020. — 52 с.

Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к экономике, экологии, естественным наукам. Исследуются аспекты современного образования, без которых невозможно решение этих проблем. Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Сопредседатели Оргкомитета конференции: директор Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ, проф. М. И. Карякин, председатель МОО «Женщины в науке и образовании» проф. МГУ Г. Ю. Ризниченко.

Программный комитет: Л. В. Новикова (председатель), О. Г. Авсянкин, Т. Ю. Анопченко, Е. В. Борисова, Т. А. Васильева, О. В. Губарь, Я. М. Ерусалимский, А. Н. Карапетянц, И. В. Мельникова, Н. И. Митин, Е. С. Никитина (Россия), И. Н. Катковская (Беларусь).

Локальный комитет: Л. В. Новикова (председатель), Б. Г. Вакулов, А. В. Гиль, Г. А. Зеленков, Г. С. Костецкая, М. М. Цвиль.

Программный комитет симпозиума: Проф. Б. И. Голубов (председатель), акад. РАН Б. С. Кашин, акад. РАН С. В. Конягин, проф. А. В. Абанин, доц. О. Г. Авсянкин (зам. председателя), проф. С. В. Бочкарев, проф. И. Я. Новиков, проф. А. М. Седлецкий, проф. М. А. Скопина, проф. А. П. Хромов (Россия), проф. В. Г. Кротов (Беларусь), проф. А. М. Олевский (Израиль), проф. С. Г. Самко (Португалия).

Оргкомитет симпозиума: член-корр. РАН А. А. Шкаликов, проф. А. Н. Карапетянц (зам. председателя), проф. М. И. Дьяченко, проф. Т. П. Лукашенко, проф. В. А. Скворцов, проф. С. А. Теляковский, доц. Л. В. Новикова (секретарь).

Международный симпозиум
Ряды Фурье и их приложения

В. А. Абилов (Махачкала)
VladimirAbAbil@yandex.ru

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

В докладе будут даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам функций на некоторых классах функций двух переменных.

А. Л. Казарян (Ереван, Армения)
artashes_ghazaryan@edu.aua.am

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ПО ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

Пусть $L^p[0,1]$ $(p>0)$ – класс всех тех измеримых на $[0,1]$ функций $f(x)$, для которых $\int_0^1 |f(x)|^p dx < +\infty$.

Пусть $\{W_k(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система Уолша и пусть $c_k(g) = \int_0^1 g(x)W_k(x)dx$ – коэффициенты Фурье - Уолша функции $g \in L^1[0,1]$.

В работах [1], [2] М. Г. Григоряном была доказана

Теорема 1. *Для любых $0<\epsilon<1$, $2 \le p \le \infty$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, такую, что $\{|c_n(\tilde{f})|, n \in spec(\tilde{f})\} \searrow$ (т.е. все ненулевые члены в последовательности $\{|c_n(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке.)*

В этой настоящей работе рассматривается вопрос о том, можно ли получить аналогичный результат в двумерном случае.

Пусть $T=[0,1]^2$, и пусть $f(x,y) \in L^p(T)$, $p \in [1,\infty)$. Коэффициенты Фурье функции $f \in L^p(T)$, $p \in [1,\infty)$, по двойной системе Уолша $W_k(x)W_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ обозначим через

$$c_{k,s}(f) = \iint\limits_T f(t,\tau)W_k(t)W_s(\tau)dtd\tau.$$

Положим

$$\Lambda(f) = spec\{c_{k,s}(f)\} = spec(f) = \{(k,s)\}, c_{k,s}(f)\} \neq 0, k,s \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

Определение. Говорят, что члены в последовательности $\{c_{k,s}(f)\}_{k,,s=0}^{\infty}$ на спектре $\Lambda(f)$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям (лучам), если $c_{k_2,s_2}(f) < c_{k_1,s_1}(f)$ ($a_{k_2,s_2} < a_{k_1,s_1}$), когда $k_2 \geq k_1, s_2 \geq s_1, k_2 + s_2 > k_1 + s_1$, (k_2, s_2), $(k_1, s_1) \in \Lambda(f)$.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Для любых $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty$ и для каждой функции $f \in L^p(T)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(T)$ с $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, такую, что ее коэффициенты Фурье по двойной системе Уолша на спекторе по модулью расположены в убывающем порядке по всем направлениям.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grigorian M. G.* Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system// Studia. Math. 2010, V. 198, № 2, C. 197–206.

2. *Grigorian M. G.* Modifications of functions, Fourier coefficients and nonlinear approximation// Matem. Sb. 2012, V. 203, № 3, C. 49–78.

А. А. Кельзон (Санкт-Петербург)
kelzon@mail.ru

О расходимости сопряженного ряда Фурье функции Ф-ограниченной вариации.

Известна теорема Юнга [1], устанавливающая необходимое и достаточное условие сходимости сопряженного ряда Фурье функция ограниченной вариации.

Понятие функции ограниченной вариации обобщалось многими авторами. Так М. Шрамм [2] ввел понятие функции Ф-ограниченной вариации, где $\Phi = \{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ —последовательность строго возрастающих выпуклых вниз функций, заданных на множестве неотрицательных чисел и таких, что $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ для всех n и x и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \infty$ для всех $x > 0$.

В докладе через ФBV обозначается семейство 2π-периодических функций f, заданных на вещественной оси и таких, что cf является функцией Ф-ограниченной вариации на отрезке $[-\pi, \pi]$ при некотором $c > 0$.

В частном случае, когда $\varphi_n(x) = x/n$ функция Ф-ограниченной вариации называется функцией гармонической ограниченной вариации. Через HBV будем обозначать семейство 2π-периодических функций f, имеющих гармоническую ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$. Это понятие было введено Д. Ватерманом [3].

Е.Ю. Редкозубова [4] доказала, что теорема Юнга сохраняет силу на классе HBV. В настоящем докладе формулируется результат, в соответствии с которым, если последовательность Φ такова, что ΦBV⊂HBV (ΦBV≠HBV), то найдется функция $f \in \Phi\mathrm{BV}$, для которой теорема Юнга теряет силу.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Young W. H.* Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe // Munchen. Sitzungaherichte. 1911. Vol. 41, № 6. S. 361–371.

2. *Schramm M.* Functions of Φ -bounded variation and Riemann-Stiltjes integration //Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 287. P. 49-63.

3. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Stud. Math. 1972. Vol. 44. P. 107 - 117.

4. *Редкозубова Е. Ю.* О сходимости сопряжённого тригонометрического ряда Фурье функции ограниченной гармонической вариации // Вестник Моск. ун-та, сер. 1. 2005, № 4, с. 48 - 52.

Р. А. Ласурия, М. Р. Голава (Абхазский гос. ун-т, Сухум)
rlasuria67@yandex.ru

СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Для величины, характеризующую сильную суммируемость двойных рядов Фурье в обобщенном гёльдеровом пространстве $H_\omega\left(T^2\right)$ устанавливается утверждение (одномерный аналог см. в [1]).

Теорема 1. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и* $\alpha := (\alpha_{ij}) = (\alpha_{ij}(\mu,\nu))$, $i,j \in \mathbb{N}_0$, *– двойная последовательность неотрицательных функций, удовлетворяющая в каждой фиксированной точке* $(\mu,\nu) \in E \subset \mathbb{R}^2$, *условиям* $\alpha_{ij} - \alpha_{(i+1)j} \ge 0,\ \alpha_{ij} - \alpha_{i(j+1)} \ge 0,\ i,j \in \mathbb{N}_0$.

Тогда $\forall f \in H_\omega\left(T^2\right) \subset H_{\omega^*}\left(T^2\right)$, $\forall m,n \in \mathbb{N}$ *и* $\forall q \ge 1$

$$\left\| \left(\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{ij} |\rho_{ij}(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{\omega^*\left(T^2\right)} \le K\left(f,\omega,\omega^*,q,\beta,\eta\right) \times$$

$$\Bigg\{ (m+1)(n+1)\,\alpha_{nm} \left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \right) \right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)} +$$

$$(m+1) \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{mj} \left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(j+1)^2}} \right) \right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)} +$$

$$(n+1)\sum_{i=m}^{\infty}\alpha_{in}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}+$$

$$\left.\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{ij}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}\right\},$$

$$K\left(f,\omega,\omega^*,q,\beta,\eta\right):=C_q\|f\|_\omega\left(2^{\frac{\beta}{\eta}}+\sup_{r>0}\frac{(\omega(r))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(r)}\right),\ C_q=const.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ласурия Р. А.* Аппроксимация и группы отклонений рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах. С.: АГУ, Митра, К. — 2017.

Селимханов Э. В. (Махачкала)
SelimEm96@yandex.ru

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В докладе будут даны оценки преобразования Фурье функций двух переменных суммируемых с квадратом на некоторых классах функций, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности.

Ю. С. Солиев (Москва, МАДИ, РУДН)
su1951@mail.ru

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ ПОЛУЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Рассматриваются вопросы конечномерных аппроксимаций интегралов $A_pf=A_p(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^p}dt, p=1,2,...$, понимаемых в смысле главного значения по Коши ($p=1$) или конечного значения по Адамару ($p\geq 2$), где $f=f(x)-2\pi$-антипериодическая плотность интегралов (2π – антипериод) [1],[2]. Пусть $L_{n-\frac{1}{2}}f=L_{n-\frac{1}{2}}(f;x)$ - тригонометрический полином полуцелого порядка $n-\frac{1}{2}$, интерполирующий $f(x)$ по узлам $x_k=\frac{k\pi}{n}, k=\overline{0,2n-1}$, а $H_{n-\frac{1}{2}}f=H_{n-\frac{1}{2}}(f;x)$ - тригонометрический полином полуцелого порядка $n-\frac{1}{2}$, интерполирующий $f(x)$ и ее производную по узлам $x_k=\frac{2k\pi}{n}, k=\overline{0,n-1}$, [3]. Аппроксимируя плотность интеграла полиномом $L_{n-\frac{1}{2}}f$, получим квадратурную формулу

$$A_pf=A_p(L_{n-\frac{1}{2}}f;x)+R_n^{(1)}f=$$

$$\frac{1}{n(p-1)!}\sum_{k=0}^{2n-1}f(x_k)\sum_{v=0}^{n-1}(v+\frac{1}{2})^{p-1}cos((v+\frac{1}{2})(x-x_k)+\frac{p\pi}{2})+R_n^{(1)}f.$$

Аналогично строится квадратурная формула с кратными узлами

$$A_pf=A_p(H_{n-\frac{1}{2}}f;x)+R_n^{(2)}f.$$

Здесь $R_n^{(m)}f=R_n^{(m)}(f;x)(m=1,2)$ - остаточные члены. Пусть $H_\alpha^{(r)}(r=0,1,...,0<\alpha\leq 1)$ - класс антипериодических функций, r-ые производные которых удовлетворяют условию Гельдера H_α. Если $f(x)\in H_\alpha^{(r)}$, то справедливы оценки $\|R_n^{(m)}f\|_c=O(n^{-r-\alpha+p-m}lnn), m=1,2$, где $r\geq 0$ при $m=1$ и $r\geq 1$ при $m=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами. II.// УМЖ, 1999, т. 51, №7, с. 940–951.

2. *Моторный В. П., Моторная О. В.,Нитиема П. К.* Об одностороннем приближении ступеньки алгебраическими многочленами в среднем. // УМЖ, 2010, т. 62, №3, с. 409–422.

3. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. // Минск, Выш. шк., 1977, 256 с.

Р. М. Тригуб (Израиль,Украина)
roald.trigub@gmail.com

О рядах Фурье и алгебрах Винера

Предполагается изложить следующие вопросы:

1. Критерий, т.е. необходимое и достаточное условие одновременно того, что тригонометрический ряд является рядом Фурье (Фурье-Стилтьеса). [1]
2. Критерий сходимости линейных средних рядов Фурье на всём пространстве $C(L_1)$ и в точках Лебега (почти всюду). [2]
3. Принцип сравнения линейных средних рядов Фурье по норме. Точный порядок приближения. [2]
4. Общее достаточное условие сходимости линейных средних рядов Фурье в точках дифференцируемости первообразной функции (почти всюду). Примеры. [3]
5. Общая теорема для асимптотики приближения индивидуальных непрерывных функций линейными средними их рядов Фурье с указанием погрешности,выражаемой модулем гладкости порядка $2m, m\in N$.[4]

Л и т е р а т у р а

1. *Liflyand E., Trigub R.* Wiener Algebras And Trigonometric Series in a Coordinated Fashion (в печати).

2. *Trigub R., Belinsky E.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. Kluwer-Springer. 2004.

3. *Тригуб Р. М.* Суммируемость рядов Фурье почти всюду с указанием множества сходимости. Матем. заметки. 2016. Том 100, № 1, 163–179.

4. *Тригуб Р. М.* Асимптотика приближения непрерывных периодических функций линейными средними их рядов Фурье. Изв. РАН, сер. мат., Том 84(2020).

А. Ю. Трынин (Саратов)
tayu@rambler.ru

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕНИЙ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ

Рассмотрим процессы Лагранжа-Штурма-Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})},$$

где U_n есть $n-$ая собственная функция задачи Штурма-Лиувилля $U''+[\lambda-q]U=0$, $U'(0)-hU(0)=0$, $U'(\pi)+HU(\pi)=0$ с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0,\pi]$ и условиями $h\neq\pm\infty$, $\quad H\neq\pm\infty$. Здесь через $0<x_{1,n}<x_{2,n}<\cdots<x_{n,n}<\pi$ обозначены нули функции U_n. Обозначим $\mathbf{\Omega}$ множество функций типа модуля непрерывности. Пусть $C(\omega^l,[a,b])$ и $C(\omega^r,[a,b])$ есть множества элементов пространства $C[a,b]$ таких, что для произвольных $a\leq x<x+h\leq b$ имеют место неравенства $f(x+h)-f(x)\geq -K_f\omega(h)$ или $f(x+h)-f(x)\leq K_f\omega(h)$, соответственно, где $\omega\in\mathbf{\Omega}$. Называем положительным (отрицательным) модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$, соответственно, функции натурального аргумента $v^+(n,f)=\sup\limits_{T_n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(f(t_{k+1})-f(t_k)\big)_+$ и $v^-(n,f)=\inf\limits_{T_n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(f(t_{k+1})-f(t_k)\big)_-$, где $z_+=\frac{z+|z|}{2}$ и $z_-=\frac{z-|z|}{2}$ и $T_n=\{a\leq t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n\leq b\}$, $n\in\mathbb{N}$. Считаем, что f принадлежит классу $V^+(v)$ или $V^-(v)$, если существует константа M_f, такая, что для любого натурального n справедливо неравенство $v^+(n,f)\leq M_f v(n)$ или $v^-(n,f)\geq -M_f v(n)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $0\leq a<b\leq\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$. *Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента* $v(n)$ *и функция* $\omega\in\mathbf{\Omega}$ *такие,* *что*

$$\lim_{n\to\infty} \min_{1\le m\le k_2-k_1-1} \left\{ \omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2} \right\} = 0,$$

где k_1 *и* k_2+1 *— номера наименьшего и наибольшего из нулей* $x_{k,n}$, *попадающих в отрезок* $[a,b]$, *то для любой функции* $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$ $(f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v))$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n^{SL}(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} = 0.$$

Ю. А. Фарков (Москва)[1]
farkov-ya@ranepa.ru

О СТУПЕНЧАТЫХ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЯХ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУПРЯМОЙ

Для данного целого $p \ge 2$ пусть $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$– система Крестенсона-Леви на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ с p-адическим сложением. Для фиксированных m и n обозначим через $\mathcal{E}_n^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ множество всех функций $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, принимающих постоянные значения на p-ичных интервалах ранга m и равных нулю на промежутке $[p^n, +\infty)$. В дополнение к приведенным в [1, раздел 4] результатам о масштабирующих функциях и модифицированном условии критерии Коэна имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть для значений* $b_k = m_0(k/p^n)$, $0 \le k \le p^n - 1$, *полинома*

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \overline{w_k(\omega)}, \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

выполнены равенства

$$b_0 = 1, \quad \sum_{l=0}^{p-1} |b_{s+lp^{n-1}}|^2 = 1 \quad \textit{для всех} \quad s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}$$

и существует $m \in \mathbb{Z}_+$ *такое, что*

$$\prod_{j=1}^{m+n} m_0(p^{-j}\omega) = 0 \quad \textit{для всех} \quad \omega \in [p^m, p^{m+1}).$$

---

[1]Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Предположим, что маска m_0 удовлетворяет модифицированному условию Коэна. Тогда функция φ, заданная своим преобразованием Фурье-Уолша по формуле

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

принадлежит классу $\mathcal{E}_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ и порождает кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Farkov Yu. A.* Wavelet frames related to Walsh function // Eur. J. Math. 2019. Vol. 5. № 1. P. 250–267.

B. N. Khabibullin (Ufa, RUSSIA)
Khabib-Bulat@mail.ru

COMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS IN SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS[1]

Let D be an *open convex subset* in the *complex plane* $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hol}(D)$ be the *space of holomrphic functions on D* equipped with the topology of uniform convergence on compact subsets, and $\mathsf{Z} := \{\mathsf{z}_k\}_{k=1,2,\dots}$ be a *sequence* in $\mathbb{C}$. The corresponding *exponential system*

$$\mathrm{Exp}^{\mathsf{Z}} := \Bigl\{ z \underset{z\,\in\,D}{\longmapsto} z^{p-1}\exp(\mathsf{z}_k z) \colon \mathsf{z}_k \in \mathsf{Z}, p = 1, 2, \dots, \sum_{\mathsf{z}_k = z} 1 \Bigr\}$$

is *complete in* $\mathrm{Hol}(D)$ if the closure of the linear hull of $\mathrm{Exp}^{\mathsf{Z}}$ in $\mathrm{Hol}(D)$ coincides with $\mathrm{Hol}(D)$. When D is unbounded, the geometric criterion of such completeness was obtained by us in 1988 for any sequences Z [1; Theorem 3.2.2]. A similar geometric criterion is unknown for any bounded D. We will discuss candidates for this criterion.

For simplicity, we formulate our illustrative result only for the case when D is the unit disk $\mathbb{D} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\bigr\}$. The following result is new even in this case. Denote by $\mathbb{R}$ the *real line*, $\mathbb{R}_*^+ := \{r \in \mathbb{R} \colon r > 0\}$.

Theorem (for $\mathbb{D}$). *Let $0 \not\equiv g \geq 0$ be an integrable ρ-powerly convex function on $\mathbb{R}_*^+$ for $\rho \in (0,1)$, i.e., there exists $\int\limits_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ and*

$$g(r) = \sup\Bigl\{ ar^{\rho} + br^{-\rho} \colon a, b \in \mathbb{R},\ ax^{\rho} + bx^{-\rho} \underset{x\,\in\,\mathbb{R}_*^+}{\leq} g(x) \Bigr\} \text{ for each } r \in \mathbb{R}_*^+.$$

[1]The research was supported by a Grant of the Russian Science Foundation, Project No. 18-11-00002.

Let $k \geq 0$ be a 2π-periodic ρ-trigonometrically convex function on $\mathbb{R}$, i.e., the function $s \underset{s\,\in\,\mathbb{R}}{\longmapsto} k'_{\text{left}}(s) + \rho^2 \int\limits_0^s k(t)\,\mathrm{d}t$ is increasing, and $k \not\equiv 0$. If

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum_{0<|\mathsf{z}_k|\leq r} k\Bigl(\frac{\mathsf{z}_k}{|\mathsf{z}_k|}\Bigr) g\Bigl(\frac{|\mathsf{z}_k|}{r}\Bigr) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

then the system $\mathrm{Exp}^{\mathsf{Z}}$ *is complete in* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

BIBLIOGRAPHY

1. *Хабибуллин Б Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Издание четвёртое дополненное. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012, 192 с. https://www.researchgate.net/publication/271841461

Ю. Х. Хасанов (Душанбе)
yukhas60@mail.ru

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ–ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В докладе приводятся необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти–периодических функций Безиковича ($f(x) \in B_2$) с конечной нормой

$$\|f(x)\|_{B_2} = \{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}},$$

когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности, т.е.

$$\lambda_0 = 0;\ \ \lambda_{-n} = -\lambda_n;\ \ \lambda_n < \lambda_{n+1};\ \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty. \tag{1}$$

В качестве структурной характеристики функции $f(x) \in B_2$ применяется модуль непрерывности порядка k

$$\omega_k(f;h)_{B_2} = \sup_{|t|\leq h} \left| \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \tbinom{k}{r} f(x+rt) \right| \ \ (h>0,\ \ k \in N).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma}\ \ (0<\beta<2,\ \ 0\leq\gamma<1), \tag{2}$$

где A_n — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in B_2$.

Пусть спектр $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f(x) \in B_2$ удовлетворяет условиям (1) и $n^{\alpha} = O\{\lambda_n\}$ $(\alpha > 0)$. Если при $0 < \beta < 2$, $0 \le \gamma < 1$, $k > (\gamma + 1 - \beta/2)/(\alpha\beta)$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta}(f; \frac{1}{n})_{B_2} \quad (\rho = (\gamma + 1 - \beta/2)/\alpha)), \tag{3}$$

где $\omega_k(f;h)_{B_2}$ — модуль непрерывности порядка k функции $f(x) \in B_2$, то ряд (2) сходится.

Имеет место утверждение, что условие (3) не только достаточно, но и необходимо для абсолютной сходимости рядов Фурье функции $f(x) \in B_2$ с монотонно убывающими коэффициентами Фурье. Т.е. показывается, что когда коэффициенты Фурье монотонно убывают, то из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (3).

Ф. А. Шамоян (Саратов)
shamoyanfa@yandex.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ГРАНИЧНАЯ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ И ТЕОРЕМА ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЁФА В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

1.Пусть $\mathbb{C}_+^n$=$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \Im z_j > 0, j = 1, \dots, n\}$, $N(\mathbb{C}_+^n) = \{f : f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}, h_j(z) \in H^{\infty}(\mathbb{C}_+^n), j = 1, 2, h_2(z) \neq 0, z \in \mathbb{C}_+^n\}$– класс функций ограниченного вида в $\mathbb{C}_+^n$. В одномерном случае класс $N(\mathbb{C}_+^n)$ совпадает с классом $\mathbb{P}$. Неванлинны в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ := \mathbb{C}_+^1$ (см. [1]), при $n \ge 2$ класс Неванлинны, т.е. класс функций f, для которых $ln|f|$ имеет n – гармоническую мажоранту и $N(\mathbb{C}_+^n)$ совершенно разные (см. [2],[3]). Известно, что если f принадлежит классу В. И. Смирнова $N^+(\mathbb{C}_+^n)$ (см. [2], [4]) и ее граничные значения на $\mathbb{R}^n$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}^n)$, то f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}_+^n)$ и тем самым преобразование Фурье этой функции $\hat{f(x)}$=$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) exp^{-itx} dt$ обращается в нуль на $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}_+^n$. Простой пример функции $f_a(z)$=$\prod_{j=1}^n e^{(-ia_j z_j)} \frac{1}{(i+z_j)^2}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_+^n(1)$,
$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, показывает, что такое утверждение не верно для $N(\mathbb{C}_+^n)$. При $n = 1$ в работе [5] было установлено, что если $\hat{f(x)} \to 0$, при $x \to -\infty$, достаточно сильно, то функция $\hat{f(x)}$ равна нулю тождественно на $\mathbb{R}_-$. При этом найдено необходимое и достаточное условие на скорость этого убывания при которых справедливо упомянутое утверждение. Для доказательства указанного результата существенную роль сыграло факторизационное представление функции из класса $N(\mathbb{C}_+)$ (см. [1]).

При $n \geq 2$ хорошо известно, что такие представления отсутствуют (см.[2], [3]). Здесь мы предложим другой подход для доказательства таких результатов при $n \geq 2$. Кроме того, приведем, на наш взгляд, ряд интересных приложений в теории квазианалитических классов функций. **2.** Пусть $M(r) = M(r_1, \dots, r_{j-1}, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ положительная, монотонно растущая функция по каждой переменной $r_j \in \mathbb{R}_+, 1 \leq j \leq n$, при фиксированных $r' = (r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, r_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+$, такая что $\lim\limits_{|r| \to \infty} \frac{ln(r_1^2 + \dots + r_n^2)}{ln M(r)} = 0$, $|r| = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}$, положим $M_m^{(j)} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{x^m}{M(r_1, \dots, r_{j-1}, x, r_{j+1}, \dots, r_n)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, n$, $T_j(r) = \sup\limits_{m \geq 1} \frac{r^m}{M_m^{(j)}}(2)$.

Пусть далее $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ – класс функций $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, для которых интеграл типа Коши тождественно равен нулю на множестве $\mathbb{C}_n \backslash \{\mathbb{C}^n_+ \bigcup \mathbb{C}^n_-\}$, где $\mathbb{C}^n_- = -\mathbb{C}^n_+$.

Теорема 1. *Пусть $f \in N(\mathbb{C}^n_+)$, при этом граничные значения f на $\mathbb{R}^n_+$ принадлежат классу $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{|y| \to \infty} \frac{ln|f(iy)|}{|y|} \leq 0$.(3)Пусть далее преобразование Фурье функции f удовлетворяет оценке $|\hat{f}(-x)| \leq \frac{1}{M(x)}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$. (4) Тогда если $\int\limits_1^\infty \frac{T_j(r)}{r^{\frac{3}{2}}} dr = +\infty$, $1 \leq j \leq n$, (5) то $\hat{f}(x)$=0, при всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^n_+$, при этом функция f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}^n_+)$.*

Обратно, если $M(x_1, \dots, x_n) = \exp(\sum_{j=1}^n P_j(x_j))$, $\frac{P_j'(t)t}{P_j(t)} \uparrow +\infty (t \to +\infty)$, $j = 1, \dots, n$ и хотя бы один из интегралов в (5) сходится, то можно построить функцию $f \in N(\mathbb{C}^n_+) \bigcap \mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\hat{f}$ удовлетворяет оценке (4) в тоже время $\hat{f} \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \notin H^1(\mathbb{C}^n_+)$

Пример функции f_a показывает, что существуют функции

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \bigcap N(\mathbb{C}^n_+) \bigcap L^1(\mathbb{R}^n),$$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{\partial^k g(x)}{\partial x^k} = 0$, $\forall k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, такие что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x + iy)| dx \geq c_0 \exp(a \cdot y)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $c_0 > 0$, $a \cdot y = \sum_{k=1}^n a_k y_k$.

Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $M = \{M_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – монотонно возрастающая последовательность положительных чисел*

$C^\infty(M) = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |\frac{\partial^{|k|} g(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}| \leq A^{|k|} M_{|k|}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ (6), $f \in N(\mathbb{C}^n_+) \bigcap \mathbb{R}P(\mathbb{R}^n) \bigcap C^\infty(M)$. Тогда если выполняются условия (3) и (5), где T – построенная функция Карлемана-Островского по последовательности M, то $f \in H^1(\mathbb{C}^n_+)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)| dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$ при всех $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Обратно, если интеграл (5) сходится или

не выполняется условие (3), то можно построить функцию f, удовлетворяющую условию (6), но $f \notin H^1(\mathbb{C}_+^n)$.

Справедливо также L^p аналог этой теоремы.

Следующее утверждение при $n = 1$, уточняет классическую теорему Р. Салинаса (см. [6]).

Теорема 3. *Пусть $g \in C^\infty(M)$, при этом существует функция $f \in N(\mathbb{C}_+^n) \bigcap \mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяющая условию (3), такая что $\lim\limits_{|y|\to 0} f(x + iy) = g(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Пусть далее $T(r) = \sup\limits_{k\geq 1} \frac{r_k}{M_k}$, $r \in \mathbb{R}_+$, если $\int\limits_1^\infty \frac{T(r)}{r^{\frac{3}{2}}} dr = +\infty$, (7) и при некотором $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial^{|k|} g(x_0)}{\partial x^k} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, (8) тогда $g(x) = 0$, при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Обратно, если интеграл (7) сходится, то можно построить функцию $g \in C_A^\infty(M) = C^\infty(\mathbb{C}_+^n \bigcup \mathbb{R}_+^n) \bigcap H(\mathbb{C}_+^n)$ такую, что выполняется условие (8), но g тождественно отлична от нуля на $\mathbb{R}^n$, где $H(\mathbb{C}_+^n)$- множество всех аналитических функций в $\mathbb{C}_+^n$.*

Замечание.

Пример функции $f(z_1, z_2) = \frac{\varphi(z_1)}{(i+z_1)^2(i+z_2)^2 S(z_2)}$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}_+^2$,
где $\varphi \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, S – произвольная внутренняя функция в $\mathbb{C}_+$, показывает, что принадлежность граничных значений функции f классу $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ в известном смысле является необходимым для справедливости утверждений теорем 1-3.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. М. Мир. 1984.
2. *Рудин У.* Теория функций в полукруге. М. Мир. 1974. М.
3. *Александров А. Б.* Теория функций в шаре//Итоги наук и техники, Современные проблемы математики, фунд-е направления, Т. 8. ВИНИТИ. М. 1985. С. 115–190.
4. *Aleksandrov A. V.* Lecture Notes in Math. 1981. v. 864. p. 1–90.
5. *Шамоян Ф. А.* Алгебра и анализ. 20:4. 2008. С. 218–240.
6. *Salinas R. B.* Rev. Acad. Ciencias. Madrid. 1955. v. 49. p. 331–368.

В. И. Щербаков (Жуковский, М.О, РФ)
kafmathan@mail.ru (для В.И.Щербакова)

О ВАРИАЦИИ ФУНКЦИИ НА НУЛЬМЕРНОЙ КОМПАКТНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность, состоящая из простых чисел; $m_n = \prod\limits_{k=0}^n p_k \; (n = 0, 1, 2, \ldots)$, а G — нульмерная компактная абелева группа (группа Виленкина) с операцией $\oplus$, обратной операцией $\ominus$, нулевым элементом 0_G, системой подгрупп (окрестностей 0_G) $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=0}^\infty G_n = \{0_G\}$ и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок $p_n\,(n = 1,2,\ldots)$. В каждом из множеств $G_{n-1} \setminus G_n$ зафиксируем элемент $e_n\,(n = 1,2,\ldots)$, который назовем базисным. Всякий элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1e_1 \oplus x_2e_2 \oplus \ldots \oplus x_ne_n \oplus \ldots, \text{ где } x_k \text{ — целые с } 0 \le x_k \le p_k - 1. \quad (1)$$

Тогда элемент $x \in G$ отображается на отрезок $[0,1]$

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k} \ (x_k \text{ определены в } (1)\ ) \qquad (2)$$

с нарушением взаимнооднозначности лишь в точках вида $r+ = x_1e_1 \oplus \oplus \ldots \oplus x_{n-1}e_{n-1} \oplus x_ne_n$ и $r- = x_1e_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}e_{n-1} \oplus (x_n - 1)e_n \oplus \oplus (p_{n+1} - 1)e_{n+1} \oplus \ldots \oplus (p_{n+k} - 1)e_{n+k} \oplus \ldots$, которые при отображении (2) переходят в одно и то же число $r = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k}$. Положив $r- < r+$, с $[0,1]$ на G можно перенести понятие упорядочивания точек, и, следовательно, определить вариацию функции на G. Однако эта вариация зависит от базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Справедливы следующие теоремы:

теорема 1. *Если* $2 < \sup\limits_n p_n < \infty$, *то существует функция* $f(x)$, *вариации которой, привязанные к различным базисным элементам* e_n *и* $\tilde{e}_n$, *различаются, однако класс функций ограниченной вариации на* G *сохраняется при всех базисных элементах* e_n и

теорема 2. *При* $\sup\limits_n p_n = \infty$ *для всякого базиса* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *найдётся монотонная относительно этого базиса функция* $f(x)$, *и другие базисные элементы* $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, *относительно которых та же функция* $f(x)$ *уже не имеет ограниченной вариации на* G.

Секция I
Дифференциальные уравнения

И. А. Андреева, Т. О. Ефимова (Санкт-Петербург)
andreeva_ia@spbstu.ru, substress@mail.ru

О МЕТОДИКЕ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СЕМЕЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ключевые слова: динамическая система, особые точки, круг Пуанкаре, фазовые портреты.

Нормальная автономная дифференциальная система второго порядка с полиномиальными правыми частями поддается полному качественному исследованию на вещественной расширенной плоскости фазовых переменных. Различными авторами выполнено исследование ряда семейств таких систем, а именно: квадратичных, однородных кубических, систем с ненулевыми линейными членами и однородными нелинейными членами нечетных степеней — с третьей по седьмую — в правых частях, и др. Эта работа продолжает рассмотрение семейства кубических систем со взаимно простыми полиномами в правых частях. Динамические системы таких типов играют важную роль как математические модели процессов, протекающих в сложных физических, биологических и социально-экономических системах [1, 2]. Изучаемый обширный класс систем разбивается на семейства и подсемейства нескольких уровней иерархии по естественным классификационным признакам. Подсемейства изучаются по единому плану: фиксируется вид систем подсемейства; анализируются общие его свойства; перечисляются особые точки систем подсемейства в круге Пуанкаре; определяются их тoподинамические типы и поведение сепаратрис систем семейства; строятся фазовые портреты в круге Пуанкаре [3]. Результатом исследования становится полная классификационная картина всех возможных топологически различных фазовых портретов динамических систем изучаемой разновидности [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев А. Ф., Андреева И. А., Детченя Л. В., Маковецкая Т. В., Садовский А. П.* Нильпотентные центры кубических систем. // Дифференциальные уравнения. Том 53. № 8. 2017. С. 1003–1008.

2. *Andreeva Irina, Andreev Alexey.* On a Behavior of Trajectories of a Certain Family of Cubic Dynamic Systems in a Poincare Circle. IOP Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1141.

3. *Андреев А. Ф., Андреева И. А.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I. // Вестник РАЕН. 2017. Т. 17. № 4. С. 8–18.

4. *Андреев А. Ф. Андреева И. А.* Фазовые портреты семейства кубических систем в круге Пуанкаре. II. // Вестник РАЕН. 2018. Т. 18. № 4. С. 11–15.

5. *Andreev Alexey, Andreeva Irina.* Investigation of a family of cubic dynamic systems.// Vibroengineering Procedia. 2017. Vol. 15. P. 88–93.

Г. С. Балашова (Москва)
balashovags@mpei.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТЯХ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В работе дается краткое представление о численном исследовании нелинейной краевой задачи о вытеснении одной несжимаемой жидкости другой в ограниченной пористой среде, состоящей из двух пластов, разделенных малопроницаемой перемычкой.

Итак, в верхний пласт, насыщенный нефтью, нагнетается вода через галерею скважин. В силу того, что его мощность значительно меньше его длины и жидкости не смешивающиеся, можно считать вытеснение поршневым, т. е. границу раздела вода-нефть считать прямолинейной, зависящей только от времени. В нижнем пласте и на внешних неподвижных границах поддерживаются постоянные давления. При закачке воды в верхнем пласте повышается давление и происходит переток жидкости в перемычку, в результате чего в ней образуется граница раздела между водяной и нефтяной зонами.

Задача состоит в нахождении распределения давлений в каждой из зон в верхнем пласте, а также закона движения границ раздела в верхнем пласте и в перемычке. Процесс описывается сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений с соответствующими условиями на неподвижных границах и условиями сопряжения на неизвестных подвижных границах.

Для решения поставленной задачи рассмотрены две предельные схемы: 1) Перемычка в течение всего процесса заполнена только вытесняемой жидкостью, что соответствует ускорению продвижения границы в верхнем пласте; 2) Перемычка заполняется вытесняемой жидкостью, что соответствует замедлению продвижения границы раздела.

Сравнение решений, полученных численным методом, позволило убедиться в разумности такого подхода. В частности, различие во временах полного вытеснения нефти водой, соответствующее предложенным схемам, не превышает пяти процентов. Следовательно, при оценочных инженерных расчетах можно пользоваться одной из предложенных схем в зависимости от свойств жидкости и пористой среды.

В. И. Безяев (Москва)
vbezyaev@mail.ru

ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для линейных эллиптических дифференциальных операторов $P(x, D)$ с почти-периодическими (п.-п.) коэффициентами в работе [1] было доказано существование предела

$$N(\lambda) \doteq \lim_{\Omega\to\infty} \frac{N_\Omega(\lambda)}{|\Omega|}, \tag{4}$$

где $N_\Omega(\lambda)$ - функция распределения собственных значений задачи Дирихле для этого оператора на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega|$ — мера Лебега области Ω. Функция $N(\lambda)$ естественным образом интерпретируется как функция распределения данного оператора.

С другой стороны, в [1] с помощью алгебр фон Неймана показано, что функцию $N(\lambda)$ самосопряженного п.-п. оператора можно интерпретировать так же, как обычную функцию распределения дискретного спектра, но с использованием обобщенной размерности и обобщенного следа. Доказано также, что множество точек роста этой функции совпадает с непрерывным спектром исходного оператора $P(x, D)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, что позволяет, в частности, оценивать лакуны по асимптотике $N(\lambda)$.

Для скалярных п.-п. гипоэллитических операторов асимптотика функции распределения $N(\lambda)$ приведена, например, в [2]. В данной работе дается асимптотика с оценкой остаточного члена функции $N(\lambda)$ для гипоэллиптических систем с п.-п. коэффициентами. Применяется метод приближенного спектрального проектора для матричных п.-п. операторов, имеющих непрерывный спектр ([3]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Шубин М. А.* Плотность состояний для самосопряженных эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1978. С. 243–275.

2. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления. 1988. Т. 64. 242 с.

3. *Безяев В. И.* Об асимптотике плотности состояний гипоэллиптических почти-периодических систем // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65, выпуск 4. С. 593–604.

Я. М. Дымарский (Долгопрудный)
dymarskii@mail.ru

УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА НА МНОГООБРАЗИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Мы рассмотрим семейство стационарных операторов Шредингера с непрерывными периодическими коэффициентами при периодических краевых условиях. Будет дано аналитическое и топологическое описание расслоения семейства на гиперповерхности, которые определяются условием постоянства длины n-й спектральной лакуны. Затем мы опишем многообразие тех периодических функций фиксированной осцилляции, которые являются собственными для некоторого оператора Шредингера. Известно, что указанное семейство операторов является фазовым пространством для уравнения КдФ. Будет показано, что уравнение КдФ «поднимается» на многообразие собственных функций. При этом расслоения семейства операторов и индуцированное расслоение многообразия собственных функций являются инвариантными для потока, порожденного уравнением КдФ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Я. М. Дымарский, Ю. А. Евтушенко.* Расслоение пространства периодических краевых задач на гиперповерхности постоянной длины n-й спектральной лакуны, Матем. сб., 2016, том 207, номер 5, 43–68

2. *Я. М. Дымарский.* Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов, СМФН, 2007, том 24, 3–159

А. И. Егоров (Москва)

Управляемость взаимосвязанных объектов с распределёнными и сосредоточечными параметрами

Рассмотрим колебания системы, описываемые следующей краевой задачей :

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{6}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = y(t), \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\ddot{y}(t) + (ak)^2 y(t) = \nu(t) + b u_x(\ell,t), \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

$$y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1. \tag{9}$$

З а д а ч а у п р а в л я е м о с т и. *Найти период времени T и функцию $\nu(t)$ такие, что решение $u = u(x,t)$ задачи (1)–(5) с начальными значе-*

ниями (2) в момент времени T принимает нулевые финальные значения:

$$u(x,T)=0, \quad u_t(x,T)=0. \tag{10}$$

Задача исследуется с использованием собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, определяемой волновым уравнением.

Литература. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Введение в теорию управления системами с распределёнными параметрами. — М.: изд.-во ЛАНЬ, 2017. — 292 с.

А. Н. Зарубин (Орёл)
aleks_zarubin@mail.ru

Двумерная краевая задача для функционального опережающе-запаздывающего уравнения

Функциональное уравнение с некарлемановским запаздыванием и опережением

$$\sum_{n=-n_1}^{n_2}\sum_{k=-k_1}^{k_2} a_{k+k_1,n+n_1}U(\alpha_1^k(x),\alpha_2^n(y))=0 \tag{1}$$

рассматривается в области $D=\{(x,y):x_0<x<x_{k_2+1},y_0<y<y_{n_2+1}\}$, где $n_j,k_j\in N(j=1,2); a_{k+k_1,n+n_1}\equiv const; \alpha_1(t),\alpha_2(t)$ - сохраняющие ориентацию взаимно-обратные $\alpha_{3-j}(\alpha_j(t))=t(j=1,2)$ диффеоморфизмы класса $C^1; \alpha_1(t)<t$ и $\alpha_2(t)>t$, причём $t_n=\alpha_1(t_{n+1}), t_{n+1}=\alpha_2(t_n); \alpha_2(t_0)>0; \alpha_1(t_1)=t_0=0$;

$$\alpha_j^l(t)\equiv\underbrace{\alpha_j(\alpha_j(...(\alpha_j(t))...)}_{l-\text{раз}}$$

, если $l>0; \alpha_j^l(t)\equiv\underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(...(\alpha_{3-j}(t))...)}_{-l-\text{раз}}$, если $l<0; \alpha_j^0(t)=t(j=1,2)$.

Без ограничения общности при $n_1=n_2=1, k_1=k_2=1$ решена

Задача R. *Найти в области* $D=\{(x,y):x_0<x<x_2,y_0<y<y_2\}=\bigcup_{i,j=0}^{1}D_{ij}; D_{kn}=\{(x,y):x_k<x<x_{k+1},y_n<y<y_{n+1}\}\,(k,n=-\overline{1,2})$ *решение* $U(x,y)\in C(\overline{D})$ *уравнения (1), удовлетворяющее условиям* $U(x,y)=r_{i,n}(x,y),(x,y)\in\overline{D}_{i,n}(i=-1,2;n=-\overline{1,2}), U(x,y)=\rho_{k,j}(x,y),(x,y)\in\overline{D}_{k,j}(j=-1,2;k=-\overline{1,2})$, *причём* $r_{-1,j}(x,y)=\rho_{-1,j}(x,y); r_{2,j}(x,y)=\rho_{2,j}(x,y)(j=-1,2)$, *где* $r_{i,n}(x,y),\rho_{k,j}(x,y)$ *- заданные непрерывные функции.*

Теорема. *Если* $r_{i,n}(x,y)\in C(\overline{D}_{i,n})(i=-1,2;n=-\overline{1,2}); \rho_{kj}(x,y)\in C(\overline{D}_{k,j})(j=-1,2;k=-\overline{1,2})$; $a_{0j}=a_{2j}(j=0,1,2), det(A_1^2-A_0A_2)\neq 0$, *то существует единственное решение* $U(x,y)$ *задачи* R.

Вопрос существования и единственности решения задачи R сводится к разрешимости матричной системы $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix} \overline{U}(x,y) = \overline{Q}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_{00}$, где $A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} & a_{0,n+1} \\ a_{2,n+1} & a_{1,n+1} \end{pmatrix}$, $(n=-1,0,1)$;

$\overline{U}(x,y) = ((U_{0,0}(x,y), U_{1,0}(\alpha_2(x),y)), (U_{0,1}(x,\alpha_2(y)), U_{1,1}(\alpha_2(x),\alpha_2(y)))^T, \overline{Q}(x,y)$

-известная вектор-функция, а $U_{i,j}(x,y) = U(x,y), (x,y) \in D_{i,j}(i,j=0,1)$.

Д. В. Лиманский (Донецк)
d.limanskiy@donnu.ru

Слабая коэрцитивность системы дифференциальных полиномов в анизотропном пространстве Соболева

Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \cdots + \alpha_n/l_n$. Рассмотрим в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ систему дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами вида

$$P_j(D) = \sum_{|\alpha:l|\le 1} a_{j\alpha} D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}. \tag{1}$$

Здесь $D_j := -i\partial/\partial x^j$, $D := (D_1, \ldots, D_n)$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$.

Для полинома $P_j(\xi) = \sum_{|\alpha:l|\le 1} a_{j\alpha}\xi^\alpha$ обозначим через $P_j^l(\xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}\xi^\alpha$ его главный l-квазиоднородный символ. Здесь $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$. Далее, пусть $l_1 \ge l_2 \ge \ldots \ge l_n$. Разобьем числа $l_1, \ldots, l_n$ на m групп, отнеся в k-ю группу все равные между собой числа. Пусть в k-й группе n_k чисел, $n_1 + \ldots + n_m = n$; $u_0 := 0$, $u_k := \sum_{i=1}^k n_i$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, так что в k-ю группу входят числа $l_{u_{k-1}+1}, \ldots, l_{u_k}$. Тогда $\mathbb{R}^n$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathbb{R}^n = \oplus_{k=1}^m E_k, \quad \text{где} \quad E_k := \operatorname{span}\{\xi_{u_{k-1}+1}, \ldots, \xi_{u_k}\}. \tag{2}$$

Теорема. [1] *Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $l_1 \ge \cdots \ge l_n$, $\{P_j(D)\}_1^N$ — система дифференциальных полиномов вида (1). Пусть также система полиномов $\{P_j(\xi)\lceil E_k\}_1^N$, суженных на подпространства E_k вида (2), является l_{u_k}-эллиптической, $k \in \{1, \ldots, m\}$.*

Тогда система операторов $\{P_j(D)\}_1^N$ l-квазиэллиптична тогда и только тогда, когда она слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, т. е. справедлива оценка

$$\sum\nolimits_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \sum\nolimits_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

с константами $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что критерии слабой коэрцитивности в изотропных пространствах Соболева ранее были найдены в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лиманский Д. В.* Критерий слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естеств. науки. 2019. № 2. С. 68–76.

2. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Матем. сборник. 2008. Т. 199, № 11. С. 75–112.

О. А. Пыркова (МФТИ), В. Н. Пырков (ИКИ РАН),
П. М. Василец
vpyrkov@mail.ru

ИЗМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕШЕТКИ МНОГОЦЕНТРОВОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО ВРЕМЕНИ

В работе [1] показано, что с помощью расчета динамики модельной решетки твердого раствора под воздействием внешнего макроскопического поля и последующего преобразования Фурье по времени могут быть определены собственные частоты колебаний решетки. В докладе [2] с помощью динамики виртуальной решетки и преобразования Фурье были определены собственные функции стационарного уравнения Шредингера (УШ) с многоцентровым трехмерным одночастичным потенциалом.

Для определения собственных функций УШ с помощью вышеуказанного метода не требуется использовать наборы базисных функций, как в других современных квантово-химических методах. Проблемой использования динамики виртуальной решетки является необходимость увеличения числа узлов, обусловленная потенциалами вблизи ядер ионов.

В данном докладе, показано, что изменение геометрии виртуальной решетки позволяет избежать кубического роста числа узлов и значительно сократить время расчета собственных значений и функций УШ с многоцентровым потенциалом с помощью динамики виртуальной решетки и последующего преобразования Фурье по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пырков В. Н., Козырев С. П., Водопьянов Л. К.* Модельный расчет оптически активных решеточных колебаний для сплава A(1-x)B(x)C (на примере Hg(1-x)Cd(x)Te) // ФТТ. 1993. Т. 35, № 9. С. 2479–2489.

2. *Пырков В. Н.* Исследование возможности использования консервативной разностной схемы волнового уравнения для определения симметрии силовых коэффициентов взаимодействия соседних ионов в твердых

растворах A II B VI // Симпозиум с международным участием "Биофизика сложных систем, Молекулярное моделирование, Системная биология": тез. докл. XVIII Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Дубна, 2015. С. 29.

V. V. Starinets (Moscow)
vstarinets@mail.ru

SINGULAR STURM—LIOUVILLE OPERATOR IN HILBERT SPACE WITH AN INDEFINITE METRIC WITH CRITICAL POINTS ON BOUNDARIES OF A SEMI-INFINITE INTERVAL

Consider $\Pi=\sum^{[\dotplus]}_{\varkappa=\pm\mu}\Pi_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$ $(\sigma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-, \mu\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{Z}, \sigma\pm\mu\notin\mathbb{Z})$ with an indefinite metric $[f,g]=\operatorname{Reg}\int_0^\infty f(x)\overline{g}(x)\,dx$, $\Pi_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$ is a π-space of rank $r_\sigma+r_\varkappa$ $(r_\nu=[\frac{|\nu|-\nu}{2}]-[\frac{|\nu|-\nu}{4}])$, arising by completion of the set of elements $q=\beta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}Q$ (Q — all possible polynomials, $\beta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=x^{\sigma/2}(1+x)^{\varkappa/2}\big)$.

For the moments sequence $\dot{\mu}_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=\operatorname{Reg}\int_0^\infty x^n\beta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle 2}(x)\,dx$ we have $\dot{\mu}_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=\frac{A_{\sigma,\varkappa}\Gamma(\sigma+n+1)\,\Gamma(\varkappa+1)}{(-1)^n\Gamma(\sigma+\varkappa+n+2)}$ $\big(A_{\sigma,\varkappa}=\frac{-\sin\pi\varkappa}{\sin\pi(\sigma+\varkappa)}\big)$. The Reg symbol means regularization at singular points (of critical $x=0$ for $\sigma<-1$ and $x=\infty$ for $\varkappa<-1$) using the regularizer $R_\gamma(x)=\frac{-\cos((2\gamma+1)\operatorname{arctg}x)}{(1+1/x^2)^{-\gamma-1/2}\sin\pi\gamma}$ ([1],[2]). The expression $l(y)=\big(4x(1+x)\,y'\big)'+\big(\frac{\mu^2}{1+x}-\frac{\sigma^2}{x}\big)\,y$ generates the operator $\mathrm{L}=\sum^{[\dotplus]}_{\varkappa=\pm\mu}\mathrm{L}_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}(=\mathrm{L}^c)$. The set $\lambda_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=(\sigma+\varkappa+2n+1)^2-1$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ forms a spectrum of $\mathrm{L}_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$: $\mathrm{L}_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}p_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=\lambda_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}p_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$, $p_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=\beta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}P_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$ $\big(P_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$ — the polynomials ([1], §4.6)$\big)$ form a basis in $\Pi_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$: $[p_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}, p_k^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}]=J_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}\delta_{n,k}$, $J_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=\operatorname{sgn}\Big(\frac{A_{\sigma,\varkappa}\,\Gamma(\sigma+n+1)\,\Gamma(\varkappa+n+1)}{(\sigma+\varkappa+2n+1)\,\Gamma(\sigma+\varkappa+n+1)}\Big)$, and $\sum_{n=0}^\infty p_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle J}(x)p_n^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}(y)=\delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}(x;y)$ is a δ-function from $\Pi'_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$ of the equipped space $\Pi^\circ_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}\subset\Pi_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}\subset\Pi'_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$: $\varphi(y)=[\varphi(\cdot),\delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}(y;\cdot)]$. For the operator $\mathrm{X}_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=\mathrm{X}^c_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$ of multiplication by x: $(\mathrm{X}_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}-\lambda)\Delta_\lambda^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}=0$ $\big(\Delta_\lambda^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}(x)=\beta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle-1}(\lambda)\,\delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}(\lambda;x)\big)$, $(\mathrm{X}_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}-\lambda_\nu)\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_\nu(i)}=\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_\nu(i-1)}$ $\big(\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_\nu(i)}=\frac{\partial^i_\lambda}{i\,!}\Delta_\lambda^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}|_{\lambda=\lambda_\nu}\in\Pi_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$, $[\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_\nu(i)},\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_{\nu'}(i')}]=0$; $\lambda_\sigma=0$, $\lambda_\varkappa=-1$; $i\in\mathbb{Z}_{0,r_\nu-1}\big)$, $[f,\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_\nu(i)}]=\sum_{k=0}^\infty\xi_k\frac{\partial^i_\lambda}{i\,!}P_k^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_\nu}$ $\forall f=\sum_{k=0}^\infty\xi_k p_k^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}\in\Pi_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$, $\operatorname{Lin}\big\{\{\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_\nu(i)}\}_{i=0}^{r_\nu-2}\big\}_{\nu\in\{\sigma,\varkappa\}}\subset\big\{\sum_{k=0}^\infty\xi_k p_k^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}$: $\sum_{k=0}^\infty|\lambda_k^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}\xi_k|^2<\infty\big\}$, $(\mathrm{L}_{\langle\sigma,\varkappa\rangle}-\lambda_i^{\langle\sigma,\varkappa\rangle})\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_\nu(i)}=(-1)^{\lambda_\nu}4(i+1)(\nu+i+1)\Delta^{\langle\sigma,\varkappa\rangle}_{\lambda_\nu(i+1)}$ $(i\in\mathbb{Z}_{0,r_\nu-2})$.

R E F E R E N C E S

1. *Starinets V. V.* Generalized classical orthogonal polynomials. — Moscow: MGUP Publishing House. 2000. (http://www.vladimirstarinets.com).

2. *Starinets V. V.* Singular Sturm—Liouville operators in spaces with an indefinite metric. — Moscow: MGUP Publishing House. 2010.

А. Н. Зарубин (Орёл)
aleks_zarubin@mail.ru
Е. В. Чаплыгина (Орёл)
lena260581@yandex.ru

Задача Трикоми для функционально-дифференциального уравнения смешанного типа

В области $D = D^+ \bigcup D^-$, где $D^+ = \{(x,y){:}\, x_0 < x < x_2, y_0 < y < y_2\} = = \bigcup\limits_{i,j=0}^{1} D_{ij}^+$ и $D^- = \bigcup\limits_{i=0}^{1} D_{i0}^-$ — эллиптическая и гиперболическая части области D, причём $D_{kn}^+ = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1}, y_n < y < y_{n+1}\}$ $(k = -\overline{1,2}; n = \overline{0,2})$; $D_{k0}^- = \left\{(x,y){:}\, -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -x_1/2 < y < 0\right\}$ $(k = 0,1)$; рассматривается дифференциально-разностное уравнение Лаврентьева-Бицадзе с отклонением

$$U_{xx}(x,y) + sgny U_{yy}(x,y) = H(y) \sum_{n=0}^{1} \sum_{k=-1}^{1} b_{k+1,n} U(\alpha_1^k(x), \alpha_2^n(y)), \qquad (1)$$

$\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ — сохраняющие ориентацию взаимно-обратные $\alpha_{3-j}(\alpha_j(t)) = t (j = 1,2)$ диффеоморфизмы класса C^2, удовлетворяющие условиям:
$\alpha_1(t) < t, \alpha_1'(t) > 1 (\alpha_1'(t) < 1)$ и $\alpha_2(t) > t, \alpha_2'(t) < 1 (\alpha_2'(t) > 1); t_n = = \alpha_1(t_{n+1}), t_{n+1} = \alpha_2(t_n), \alpha_2(t_0) > 0; \alpha_1(t_1) = t_0 = 0;$
$\alpha_j^l(t) \equiv \underbrace{(\alpha_j(\alpha_j(...(\alpha_j(t))...)}_{l-\text{раз}};$ если $l > 0$; $\alpha_j^l(t) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(...(\alpha_{3-j}(t))...)}_{-l-\text{раз}},$
если $l < 0; \alpha_j^0(t) = t (j = 1,2)$.

Задача. Найти в области D решение $U(x,y) \in C(\overline{D}) \bigcap C^2(D \backslash (J \bigcup I))$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям
$U(x,y) = P_{i,n}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{i,n}^+ (i = -1,2; n = \overline{0,2}); U(x,y) = S_{k,2}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_{k,2}^+ (k = -\overline{1,2}); U(x, -\alpha_1^k(x)) = \varphi_k(x), x_k < x < \alpha_2^k(x_1/2)$ $(k = 0,1)$, причём $P_{j,2}(x,y) = S_{j,2}(x,y) (j = -1,2), \varphi_0(0) = P_{-1,0}(0,0)$; $I : y = 0; J = J_1 \bigcup J_2; J_1 : x = x_1, J_2{:} y = y_1$, где $P_{i,n}(x,y), S_{k,2}(x,y)$, $\varphi_k(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. Если $P_{i,n}(x,y) \in C(\overline{D}_{i,n}^+) \bigcap C^2(D_{i,n}^+) (i = -1,2; n = \overline{0,2})$; $S_{k,2}(x,y) \in C(\overline{D}_{k,2}^+) \bigcap C^2(D_{k,2}^+) (k = -\overline{1,2})$; $\varphi_k(x) \in C[x_k, \alpha_2^k(x_1/2)] \bigcap C^2(x_k, \alpha_2^k(x_1/2)) (k = 0,1); P_{j,2}(x,y) = = S_{j,2}(x,y) (j = -1,2), \varphi_0(0) = P_{-1,0}(0,0); b_{0j} = b_{2j} (j = 0,1)$; $det B \neq 0$, то существует единственное решение задачи.

Вопрос существования и единственности решения задачи сводится к разрешимости матричной системы
$\overline{U}_{xx}(x,y) + sgny \overline{U}_{yy}(x,y) + H(y) \begin{pmatrix} B_0 & B_1 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix} \overline{U}(x,y) = H(y) \overline{H}(x,y),$

$(x,y) \in D^{\pm}_{0,0}$, где $B_n = \begin{pmatrix} b_{1,n} & b_{0,n} \\ b_{2,n} & b_{1,n} \end{pmatrix} (n=0,1)$;
$\overline{U}(x,y) = ((U_{0,0}(x,y), U_{1,0}(\alpha_2(x),y), (U_{0,1}(x,\alpha_2(y)), U_{1,1}(\alpha_2(x),\alpha_2(y)))^T$;
$\overline{H}(x,y)$ — известная вектор-функция, а $U_{i,j}(x,y) = U(x,y)$,
$(x,y) \in D^{\pm}_{ij} (i,j=0,1)$.

Секция II
Теория функций

Г. А. Карагулян, И. Н. Катковская, В. Г. Кротов
g.karagulyan@gmail.com, katkovskaya@bntu.by, krotov@bsu.by
СВОЙСТВО ФАТУ ДЛЯ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЕДИНИЦ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Пусть X — метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ со свойствами

$$\exists\, a_\mu \geq 1 \quad \mu(B(x,2r)) \leq a_\mu \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ r>0,$$

$$\exists\, C_1, C_2 > 1 \quad \mu(B(x,C_1 r)) \geq C_2 \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ r>0.$$

Для семейства интегральных операторов

$$\mathcal{F}_t f(x) = \int\limits_X \varphi_t(x,z) f(z)\, d\mu(z).$$

справедливо следующее неравенство слабого типа

$$\mu\{\mathcal{N}_\lambda f > A\} \leq (C_\varphi + C_\lambda^p) \left(\frac{\|f\|_{L^p(X)}}{A} \right)^p,\ A>0,\ f \in L^p(X).$$

Здесь

$$\mathcal{N}_\lambda f(x) = \sup\{|\mathcal{F}_t f(y)| : d(x,y) < \lambda(t)\},$$

функция $\lambda : (0,1] \to (0,1]$ возрастает, $\lambda(+0)=0$,

$$C_\lambda^p := \sup_{t\in(0,1]} \sup_{x\in X} [\mu(B(x,\lambda(t)))]^{1/p} \left(\int\limits_{B(x,\lambda(t))} |\varphi_t(x,z)|^q \, d\mu(z) \right)^{1/q},$$

если $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$,

$$C_\lambda^1 := \sup_{t\in(0,1]} \sup_{x\in X} \mu(B(x,\lambda(t))) \sup_{y,z\in B(x,\lambda(t))} |\varphi_t(y,z)|$$

и

$$C_\varphi := \sup_{t\in(0,1]} \sup_{x\in X} \|\varphi_t^*(x,\cdot)\|_{L^1(X)},$$

где

$$\varphi_t^*(x,y) := \sup\{|\varphi_t(x,z)| : d(x,y) \leq d(x,z)\}.$$

Для многих классических аппроксимативных единиц наше неравенство приводит к точному описанию свойства Фату.

Г. Н. Казимиров (Гомель)
grigory.kazimirov@gmail.com

О СОВПАДЕНИИ ОБОБЩЁННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ НА КЛАССЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Найден класс функций, на котором совпадают обобщённые модули гладкости, определяемые при помощи оператора обобщённого сдвига и в которых разности берутся с разным и одинаковым шагом. Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\| = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f|^p dx\right)^{1/p} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1,1]]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1 \leq x < 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)(1-x)^\alpha(1-x)^\beta \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1-x)^\beta\|_p$.

Для $\nu > -\frac{1}{2}$ определим оператор обобщённого сдвига $T_h(f,x,\nu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int\limits_{-1}^{1} f(x\cos h + y\sqrt{1-x^2}\sin h)(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy$, где $\gamma(\nu) = \int\limits_{-1}^{1} (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy$. Введём обозначения ($r = 2, 3, \ldots$):

$\triangle_h^1(f,x,\nu) = T_h(f,x,\nu) - f(x) \triangle_{h_1,\ldots,h_r}^r(f,x,\nu) = \triangle_{h_r}^1(\triangle_{h_1,\ldots,h_{r-1}}^{r-1}(f,x,\nu)$

$\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha,\beta} = \sup\limits_{|h_i| \leq \delta, i=1,\ldots,r} \| \triangle_{h_1,\ldots,h_r}^r (f,x,\nu)\|_{p,\alpha,\beta}$

$\triangle_h^r(f,x,\nu) = \triangle_h^1(\triangle_h^{r-1}(f,x,\nu),x,\nu)$

$\bar{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha,\beta} = \sup\limits_{|h| \leq \delta} \| \triangle_h^r (f,x,\nu)\|_{p,\alpha,\beta}$

$P_k^{(\nu)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — алгебраические многочлены степени k, ортогональные друг другу на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-x^2)^\nu$.

Утверждение. Пусть числа p, r, ν такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $r = 1, 2, 3, \ldots, \nu$, $\nu > -\frac{1}{2}$ а α и β выбраны по правилу: $\alpha \geq \beta > -\frac{1}{2}$ и $\alpha \leq \nu$ при $p = 1$, $\alpha < \nu + 1 - \frac{1}{p}$ и $\beta < \nu + 1 - \frac{1}{p}$ при $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < \nu + \frac{1}{2}$ и $0 \leq \beta < \nu + \frac{1}{2}$ при $p = \infty$. Тогда

$\tilde{\omega}_r(P_k^{(\nu)},\delta,\nu)_{p,\alpha,\beta} = \bar{\omega}_r(P_k^{(\nu)},\delta,\nu)_{p,\alpha,\beta}$

В. Р. Мисюк (Гродно)
misiuk@grsu.by

ОБ ОДНОМ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ С. Л. СОБОЛЕВА [1]

Пространства С. Л. Соболева хорошо известны и достаточно глубоко изучены. Определим их. Через $C^s(D)$,$s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций, определённых на $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и имеющих s-ю непрерывную производную, $C^0(D) := C(D)$. Тогда $W^s_p(D)$, $1 \leq p \leq \infty$ и $s \in \mathbb{N}$ – множество функций $f \in C^{s-1}(D)$ таких, что $f^{(s-1)}$ абсолютно непрерывны на D и $f^{(s)} \in L_p(D)$. В этом случае $W^s_p(D)$ называют *пространством С. Л. Соболева.* Теорема вложения С.Л. Соболева [1] утверждает, что $W^1_q(D) \subset L_p(D)$, где $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$.

Имеет место следующий аналог обращения этой теоремы, дополняющий ранее известные результаты.

Теорема. *Пусть $p > 2$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$. Тогда для любой рациональной функции r степени не выше n с полюсами во внешности круга D*

$$\|r\|_{W^1_q(D)} \leq c\sqrt{n}\|r\|_{L_p(D)}\,,$$

где $c > 0$ и зависит лишь от p.

Заметим, что это соотношение является точным в смысле входящих в него параметров p и n. Именно, точность относительно роста множителя $\sqrt{n}$ легко подтверждается на примере функций $r(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Квазинорму $\|r\|_{W^1_q}$ нельзя заменить соответственно квазинормой $\|r\|_{W^1_u}$ и ни при каких $u > q$. В этом можно убедиться на примере простейшей рациональной функции $r(z) = (z_0 - z)^{-1}$, при $|z_0| > 1$.

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2020».

Е. А. Ровба, В. Ю. Медведева (Гродно, Беларусь)
rovba.ea@gmail.com   Medvedeva_VJ_97@mail.ru

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ $|x|^\alpha$ ПО РАСШИРЕННОЙ СИСТЕМЕ УЗЛОВ ЧЕБЫШЁВА – МАРКОВА [1]

Исследования полиномиальных приближений функций, имеющих алгебраические особенности, имеют богатое историческое наследие и своими корнями восходят к работам С. Н. Бернштейна [1]. На сегодняшний день этому направлению в теории аппроксимации посвящено значительное число работ. В этом ряду следует выделить исследования М. Н. Ганзбурга [2] и М. Реверса [3], посвященные интерполяции функции $|x|^\alpha, \alpha > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ по различным системам узлов Чебышева.

Исследования наилучших равномерных рациональных приближений функций со степенной особенностью также затронули интересы многих математиков [4–6].

На лекции планируется осветить вопросы, связанные с интерполированием функции $|x|^\alpha, \alpha > 0$, по расширенной системе узлов Чебышёва – Маркова на отрезке $[-1, 1]$. В частности, получено интегральное представление остатка интерполирования, найдены оценки сверху равномерных приближений рациональными интерполяционными функциями с такими узлами для различных случаев расположения полюсов аппроксимирующей функции. В качестве следствия приходим к уже известным ранее результатам М. Н. Ганзбурга [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 169–190.

2. *Ganzburg M. I.* The Bernstein Constant and Polynomial Interpolation at the Chebyshev Nodes // J. Approx. Theory. 2002. Vol. 119, № 2. P. 193–213.

3. *Revers M.* On the asymptotics of polynomial interpolation to $|x|^\alpha$ at the Chebyshev nodes // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 165. P. 70–82.

4. *Andersson J.-E.* Rational approximation to functions like x^α in integral norms // Analysis Math. 1988. Vol. 14, № 1. P. 11–25.

5. *Stahl H.* Best uniform rational approximation of x^α on $[0, 1]$ // Am. Math. Cocoety. 1993. Vol. 28, № 1. P. 116–122.

6. *Пекарский А. А.* Аппроксимация функции z^α рациональными дробями в области с нулевым внешним углом // Математические заметки. 2012. Т. 91, № 5, С. 761–772.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ (№ 20162269).

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Д. А. Волков (Гомель)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

ОБ АСИМПТОТИКЕ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА [1]

Пусть $\mathbb{Z}_+^k$ — множество упорядоченных k целых неотрицательных чисел. Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$. Порядок $\overrightarrow{m}$ — это сумма $|m| = m_1 + \ldots + m_k$ и $n_j = n + |m| - -m_j$. Рассмотрим вектор-функцию $F_\gamma^\lambda = \left\{F_\gamma^1(z), ..., F_\gamma^k(z)\right\}$, где $F_\gamma^j(z)$ — функция Миттаг-Леффлера, $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ (см. [1]).

Аппроксимациями Эрмита – Паде типа $(n, \overrightarrow{m})$ *системы* F_γ^λ называют рациональные дроби

$$\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = \pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z; F_\gamma^\lambda) = \frac{P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z)}{Q_{n,\overrightarrow{m}}(z)}, \ \ j = 1, 2, \ldots, k,$$

где алгебраические многочлены $Q_{n,\overrightarrow{m}}(z) = Q_{n,\overrightarrow{m}}(z; F_\gamma^\lambda)$,

$P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = = P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z; F_\gamma^\lambda), \deg Q_{n,\overrightarrow{m}} \leqslant |m|, \deg P^j_{n,\overrightarrow{m}} \leqslant n_j$ удовлетворяют условиям

$$Q_{n,\overrightarrow{m}}(z)\, F_\gamma^j(z) - P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = A_j z^{n+|m|+1} + \ldots .$$

$Q_{n,\overrightarrow{m}}$, $P^j_{n,\overrightarrow{m}}$ называют *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для системы* F_γ^λ. Следующая теорема описывает скорость сходимости таких аппроксимаций и тем самым дополняет ранее известные результаты (см. [1]).

Теорема. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+^1$, $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ *— набор различных отличных от нуля комплексных чисел и* $n \geqslant m_j - -1$, $j = 1, 2, ..., k$. *Тогда если* $\lim_{n\to\infty} m(n)/\sqrt{n} = 0$, *то равномерно по всем таким* $\overrightarrow{m}$, *что* $0 \leqslant |m| \leqslant m(n)$, *при* $n \to +\infty$

$$F_\gamma^j(z) - \pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z; F_\gamma^\lambda) =$$

$$= (-1)^{|m|}\, \lambda_j^{n+m_j+1}\ \Omega_j(k)\ \frac{m_j!\ (\gamma)_n\ z^{n+|m|+1}}{(\gamma)_{n+|m|}\ (\gamma)_{n+m_j+1}}\, (1 + o(1)),$$

где $\Omega_j(1) = 1$, $\Omega_j(k) = \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^k (\lambda_\nu - \lambda_j)^{m_\nu}$, *если* $k > 1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера // Труды МИАН. 2018. Т. 301. С. 241–258.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко, А. А. Драпеза
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, sidortsov@mail.ru, drapeza1992@mail.ru

ПОЛИОРТОГОНАЛЬНОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ [1]

В комплексном линейном пространстве $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$, состоящем из многочленов, определим линейные функционалы $\mathfrak{S}_{s^j}$: если $T \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ и $T(z) = t_0 + t_1 z + \ldots + t_m z^m$, то

$$\mathfrak{S}_{s^j}(T(z)) := t_0 f_0^j + t_1 f_1^j + \ldots + t_m f_m^j\,,$$

где последовательность $s^j := (f_0^j, f_1^j, \ldots)$, а f_ν^j — коэффициенты формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, \;\; j = 1, 2, \ldots, k. \qquad (1)$$

Множество k–мерных мультииндексов $n = (n_1, \ldots, n_k)$, т.е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $n = (n_1, \ldots, n_k)$ – это сумма $|n| := n_1 + \ldots + n_k$. Пусть $n = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — ненулевой мультииндекс.

Определение 1. *Тождественно не равный нулю многочлен Q, $\deg Q \leqslant |n|$ будем называть n-м полиортогональным многочленом для набора формальных степенных рядов (1), если*

$$\mathfrak{S}_{s^j}(\,Q(z)\,z^{\nu}\,) = 0, \;\; \nu = 0, 1, \ldots, n_j - 1; \;\; j = 1, 2, \ldots, k.$$

Определение 2. *Тождественно не равный нулю многочлен Q^*, $\deg Q^* \leq |n|$, называют (см. [1]) многочленом Эрмита – Паде 2-го рода для набора формальных степенных рядов (1), если для некоторых многочленов $P_1, \ldots, P_k$ выполняются равенства*

$$R_n^j(z) = Q^*(z) f_j(z) - P_j(z) = \frac{c_j}{z^{n_j+1}} + \ldots, \;\; j = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Теорема. *Если для набора (1) и мультииндекса n многочлен Эрмита – Паде Q^* определяется однозначно с точностью до мультипликативного множителя, то он является n-м полиортогональным многочленом для набора формальных степенных рядов (1).*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Р. М. Тригуб (Израиль, Украина)
roald.trigub@gmail.com

О многочленах Чебышева и целых коэффициентах

1.Теоремы о приближении многочленами с целыми и натуральными коэффициентами

2.Наилучшее приближение констант многочленами с целыми коэффициентами

3.Целочисленный трансфинитный диаметр и распределение простых чисел

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Р. М. Тригуб* О многочленах Чебышева и целых коэффициентах. Матем. зам., 105:2 (2019) 2. *Р. М. Тригуб* О наилучшем приближении констант многочленами с целыми коэффициентами, arXiv[math.C.A.] 27 Dec.2019

B. N. Khabibullin (Ufa, RUSSIA)
Khabib-Bulat@mail.ru

DEVELOPMENT OF THE MALLIAVIN – RUBEL THEOREM ON THE GROWTH OF ENTIRE FUNCTIONS[1]

A holomorphic function f on the *complex plane* $\mathbb{C}$ is an *entire function of exponential type* (*e.f.e.t.*) if $\limsup\limits_{z\to\infty}\frac{\ln\bigl|f(z)\bigr|}{|z|}<+\infty$. Let $\mathsf{Z}:=\{\mathsf{z}_k\}_{k=1,2,\dots}$, $\mathsf{W}:=\{\mathsf{w}_k\}_{k=1,2,\dots}\subset\mathbb{C}$ are sequences, $x^+:=\max\{x,0\}$,

$$l_{\mathsf{Z}}(r,R):=\max\left\{\sum_{r<|\mathsf{z}_k|\le R}\Bigl(\Re\frac{1}{\mathsf{z}_k}\Bigr)^+,\ \sum_{r<|\mathsf{z}_k|\le R}\Bigl(-\Re\frac{1}{\mathsf{z}_k}\Bigr)^+\right\},\ 0\le r<R.$$

Main Theorem. *If* $\limsup\limits_{k\to\infty}\frac{|\Re\mathsf{z}_k|}{|\mathsf{z}_k|}>0$*and* $\limsup\limits_{0<r\to\infty}\frac{1}{r}\sum\limits_{|\mathsf{w}_k|\le r}1<+\infty$, *then the following two statements are equivalent:*
I. *For every e.f.e.t.* $g\neq 0$ *vanishing on* W, *there is an e.f.e.t.* $f\neq 0$ *vanishing on* Z *such that* $\bigl|f(iy)\bigr|\le\bigl|g(iy)\bigr|$ *for each real number* y.
II. *There is an increasing sequence* $(r_n)_{n=1,\dots}$ *with* $r_n>0$, $\sup\limits_n r_n=+\infty$, $\sup\limits_n\frac{r_{n+1}}{r_n}<+\infty$ *such that* $\limsup\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{n\le N}\Bigl(l_{\mathsf{Z}}(r_n,r_N)-l_{\mathsf{W}}(r_n,r_N)\Bigr)<+\infty$.

Our Main Theorem develops the Malliavin – Rubel Theorem [1; Theorem 4.1], [2; Ch. 22], which was proved only for Z,W lying on the positive semi-axis, and a part of our results [3], [4; Main Theorem], [5; Ch. 3].

[1]The research was supported by a Grant of the Russian Science Foundation, Project No. 18-11-00002.

BIBLIOGRAPHY

1. *Malliavin P., Rubel L. A.* On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89:2. P. 175–201

2. *Rubel L. A.* Entire and Meromorphic Functions. NY: Springer, 1996.

3. *Хабибуллин Б Н.* О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 5. С. 706–719; *Khabibullin B. N.* On the growth of entire functions of exponential type along the imaginary axis // Math. USSR-Sb. 1990. V. 67:1 (1990). P. 149–163.

4. *Хабибуллин Б Н.* О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями // Analysis Math. 1991. Т. 17. № 3. С. 239–256.

5. *Хабибуллин Б Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Издание четвёртое дополненное. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012, 192 с. `https://www.researchgate.net/publication/271841461`

Секция V
Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии

В. А. Батищев (Ростов-на-Дону)
batishev-v@mail.ru

БИФУРКАЦИЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Изучается стационарное термокапиллярное течение жидкости в горизонтальном слое бесконечной толщины, ограниченном сверху свободной границей, на которой задано неравномерное распределение температуры. Показано, что при охлаждении свободной границы возможно появление вращательных режимов в результате бифуркации незакрученного течения в пограничном слое вблизи границы. Вращательные режимы представляют собой двухпараметрическое семейство, параметры которого не зависят от внешних условий.

Течение жидкости рассчитывается на основе системы Навье-Стокса и уравнения переноса тепла при исчезающих диффузионных коэффициентах. Показано, что вблизи свободной границы возникает пространственный пограничный слой, течение в котором описывается системой уравнений Прандтля. Вне этого слоя возникает течение, которое в главном приближениями описывается уравнениями Эйлера невязкой жидкости. Численно рассчитаны два типа режимов. Первый тип — не закрученные течения в пограничном слое. Эти режимы существуют, если скорость внешнего потока не менее своего критического значения. Найдены условия устойчивости этих режимов относительно малых возмущений, заданных в виде колебаний по окружной координате.

Второй тип режимов представляют вращательные течения в пограничном слое, вне которого вращение жидкости отсутствует. Показано, что вращательные режимы появляются при бифуркации незакрученных режимов только при локальном охлаждении свободной границы. Построена асимптотика вращательных режимов вблизи точки бифуркации. Показано, что от точки бифуркации ответвляются как осесимметричные, так и не симметричные режимы. В случае осевой симметрии вращательные режимы полностью определяется постановкой задачи. При отсутствии симметрии вращательные режимы представляет собой двухпараметрическое семейство, параметры которого заполняют круг единичного радиуса и не определяются внешними условиями. Для всех вторичных режимов получены точные решения системы уравнений пограничного слоя.

Н. В. Боев (Ростов-на-Дону)
boyev@math.rsu.ru

ДИФРАКЦИЯ КОРОТКИХ ВОЛН НА МНОЖЕСТВЕННЫХ ПОЛОСТНЫХ ДЕФЕКТАХ В ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЛЮБЫХ ЗАКОНОВ ИХ ОТРАЖЕНИЙ И ТРАНСФОРМАЦИЙ

Теоретическая значимость проведенного фундаментального исследования состоит в получении явного выражения перемещений в переотраженных конечное число раз высокочастотных упругих волнах от скоплений полостных препятствий произвольной формы, находящихся в бесконечной трехмерной упругой среде при любых законах их отражений и трансформаций. Практическое значение состоит в применении полученных выражений к расчету волновых полей в пространственных задачах ультразвукового неразрушающего контроля упругих материалов.

Динамическое воздействие выбрано следующее: в скопление полостных препятствий вводится импульс с тональным заполнением несколькими периодами плоской высокочастотной, монохроматической продольной или поперечной упругой волны, а в некоторой выбранной области упругой среды принимаются прошедшие волны. При этом каждая из распространяющихся волн может претерпевать любые возможные отражения (продольной волны в продольную, поперечной волны в поперечную) и трансформации (продольной волны в поперечную, поперечной волны в продольную). Ультразвуковой режим колебаний позволяет построить решение трехмерной задачи на основе геометрической теории дифракции. Задача исследуется в локальной постановке. На первом этапе определяются траектории лучей распространения упругих волн с учетом их отражений и трансформаций в точках зеркального отражения на граничных поверхностях препятствий. Траектории лучей представляют собой пространственные ломаные линии. При прохождении каждого луча из источника волны через скопление полостных препятствий образуется, в общем случае, конечное число лучей с различными типами отражений и трансформаций упругих волн. В область приема могут попасть как все образовавшиеся лучи, так и часть их.

На втором этапе интегральные представления перемещений в переотраженных волнах выписаны на основе физической теории дифракции Кирхгофа. Асимптотической оценкой кратных дифракционных интегралов методом многомерной стационарной фазы выписан явный вид геометрооптического приближения перемещений в многократно отраженных и трансформированных упругих волнах. На основе полученного решения в области приема импульса анализируются фазы и величины перемещений в прошедших продольных и поперечных ультразвуковых волнах.

V. K. Zakharov (Moscow)
zakharov_valeriy@list.ru

PARALLEL DEFINITIONS FOR ENERGY AND INFORMATION. PARALLELISM BETWEEN ENERGETIC AND INFORMATIC PRODUCING SYSTEMS

For the last time Informatics reached extraordinary heights in its development. However a satisfactory solid theoretical foundation for these sciences has not been established until now. The reason is the absence of satisfactory general definitions of the notions of information and informatic system.

The distinguished peculiarity is inherent not to Informatics only. In Physics despite of its longer existence the situation with the solid theoretical foundation gets on in the same way: there are no satisfactory general definitions of the notions of energy and energetic system.

In 1964 the outstanding American physicist Richard Feynman in his own famous lectures on Physics wrote: «It is important to realize that in physics today, we have no knowledge of what energy is. We do not have a picture that energy comes in little blobs of a definite amount. It is not that way. However, there are formulas for calculating some numerical quantity, . . . ».

The following conclusion may be done from this apparently not random coincidence: the cause of the described situation is founded not in Informatics itself and not in Physics itself, but in the absence of satisfactory general solid theoretical conception of the world and its being, in which the notions of information and energy might appear in some natural deductive way.

The report is intended to try to fill this gap in the scientific world outlook.

The report consists of two parts. The first part sets out the general united (synthetical) closed in itself conception of the world, which allows us to formulate some parallel definitions of the notions of energy and information, without going beyond the bounds of this world.

In the second part of the report on the basis of the conception set forth in the first part, some sufficiently general notion of the producing (conservatively-dynamic surrounded stream) system is introduced. In the capacity of important special cases of such systems, some notions of the energetic producing system and the informatic producing system are introduced.

А. Ю. Переварюха (Санкт-Петербург)
madelf@rambler.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ В ПОПУЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ ГИБРИДНЫМИ МЕТОДАМИ [1]

Инвазионные процессы в изолированных ранее экосистемах развиваются стремительно. Наиболее агрессивно развиваются сценарии вторжения видов насекомых, обладающих токсичной гемолимфой. Моделирования таких явлений возможно с учетом стадийности онтогенеза и нарушения темпов индивидуального развития организмов. В дискретно-непрерывной модели мы предложим взаимосвязь двух процессов: убыли численности и темпов роста особей. Учтем оптимальное значение размерного развития $\hat{w}$. Убыль численности поколения $N(t)$ от исходной $N(0)$ расчитаем на интервале времени $t \in [0, T]$ объединённые в систему дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -\left(\alpha\sqrt{(\hat{w} - w(t))^2}N(t) + \Psi[S]\beta\right) N(t) \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{m}{\sqrt[3]{N^2 + \zeta}} \end{cases} \tag{1}$$

$w(t)$ — уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей; m – параметр количества корма; ζ — ограничение темпов развития не зависящее от N; показатель трофической конкуренции в пределах $2 < k < 3$; α — коэффициент компенсационной смертности от скученности; β декомпенсационной смертности; $N(0) = \lambda S, w(0) = w_0$ λ — средняя плодовитость родителей S; $t \in [0, T], R = N(T)$ интервал уязвимости с действием $\alpha N^2(t)$ типа убыли. В итерации $\psi^n(R_0)$, где на концах множества временных кадров $\{[T_n, T_{n+1}]\}_i$ переопределяем начальные условия $N_{n+1}(0) = N_n(T_n)\lambda$ для расчета задачи Коши на смежном отрезке времени. Области притяжения Ξ_1 и Ξ_2, их граница неустойчивая «точка-репеллер» R_1^* первого пересечения кривой с биссектрисой координатного угла. Особая точка R_1^* отражает предельную допустимую для выживания популяции $L > 0$ численность. В экологическом смысле у Ξ_1 аттрактора не существует. В $N = 0$ зависимость неопределенна. При граничном кризисе $R_0 \dots R_n < R_1^*$ инвазия заканчивается сценарием полного разрушения среды и оставкой размножения.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 17-07-00125).

С. С. Хрущев, Т. Ю. Плюснина (Москва)
styx@biophys.msu.ru

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ МУЛЬТИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Метод спектральной мультиэкспоненциальной аппроксимации (СМЭА) используется для обработки экспериментальных данных по активности фотосинтеза у растений и микроводорослей [1]. Разложение a_i кривой индукции флуоресценции по базису, составленному из функций e^{-t/τ_i} с характерными временами τ_i, взятыми на логарифмической шкале, позволяет выделить фазы нарастания флуоресценции, соответствующие стадиям фотосинтетического электронного транспорта. В исходном методе разреженность получаемого разложения a_i достигается за счет ограничения $a_i \geqslant 0$, что ограничивает применимость метода анализом возрастающего участка кривой. В данной работе вместо этого ограничения используется $\mathcal{L}_1$ регуляризация (LASSO). Показано, что получаемое методом градиентного спуска решение не является разреженным и сильно зависит от коэффициента регуляризации α. Использование метода наименьших углов (LARS) [2], в котором к штрафной функции $\mathcal{L}_1$ добавляется неявный $\mathcal{L}_0$-регуляризатор, позволяет получить состоящее из 4–8 фаз разложение, обеспечивающее коэффициент детерминации $r^2 \geqslant 0,999$. При расчете пути регуляризации r^2 возрастает по мере уменьшения α. В качестве окончательного результата выбирается решение с максимальным α, при котором r^2 превышает заданное пороговое значение. Показано, что для большинства индукционных кривых в качестве порогового значения можно выбрать $r^2 = 0,999$. Это позволяет в автоматическом режиме анализировать большие объемы экспериментальных данных. Для сильно «зашумленных» данных, зарегистрированных вблизи нижней границы чувствительности измерительного прибора, пороговое значение r^2 не достигается ни при каком α, что позволяет проводить фильтрацию невалидных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Antal T. et al.* Chlorophyll fluorescence induction and relaxation system for the continuous monitoring of photosynthetic capacity in photobioreactors // Physiol. Plant. 2019. Vol. 165, № 3, pp. 476–486. DOI: 10.1111/ppl.12693.

2. *Efron B. et al.* Least Angle Regression // Ann. Stat. 2004. Vol. 32, № 2, pp. 407–499. DOI: 10.1214/009053604000000067.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 20-04-00465).

Секция VIII
Цифровая экономика: тенденции развития

А. И. Лешукович (Душанбе, Таджикистан)
alena-_-666@mail.ru

УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТЬЮ В ПРОЦЕССЕ РАЗВИТИЯ ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Интеллектуальный потенциал — это ключевой фактор формирования экономики, основанной на знаниях, и именно от того, насколько расширенным является процесс воспроизводства интеллекта и знаний, зависит качество и темпы развития всего общества.

Для повышения интеллектуального потенциала необходимо обоснование системы мониторинга, определяющей состояние научно-технического комплекса и формирующей аналитическую базу для разработки стратегии инновационного развития. Система мониторинга научно-технического потенциала должна включать блоки, характеризующие совокупность кадровых, материальных, финансовых и информационных ресурсов, которыми располагает государство, а также уровнем организационных и управленческих структур, обеспечивающих функционирование научной сферы.

Участие в мировом процессе инновационного развития требует концентрации финансовых и материально-технических ресурсов всех перспективных для Таджикистана научно-технологических направлений. С учетом реализации социально-экономической политики необходимо повышение роли научных исследований и разработок как одного из основных ресурсов устойчивого экономического роста. Управление наукой представляет собой совокупность мер, которые направлены на организацию работы научных учреждений на уровне, например, институтов или на уровне государства. Следует отметить, что финансирование науки должно осуществляться на уровне не менее 2 процентов от ВВП страны. При этом оптимальным считается финансирование из государственных источников и частного бизнеса в соотношении 50 на 50. Эффективное управление наукой должно привести к эффективной экономике.

Действующая практика управления инновационной деятельностью в Республике Таджикистан, а также устойчивый отрыв инновационной деятельности от хозяйственной практики не способствуют развитию экономики. В настоящее время основными объектами науки продолжают оставаться научно-исследовательские институты, ВУЗы и научно-исследовательские организации, деятельность которых дистанцировалась от системы взаимодействия науки и бизнеса. Интеллектуальный потенциал национальной экономики — это подсистема экономического потенциала страны, представляющая собой органичное единство индивидуальных интеллектуальных потенциалов, отражающих способности к производству знаний, а также реализованные и не реализованные мыслительные возможности индивидуальных интеллектов.

Секция X
Современные проблемы образования

Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Светличная Н. О.
(Ростов-на-Дону)
Galina.kostezkaya@gmail.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ПРЕЗЕНТАЦИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ ОБЩЕНАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН ДЛЯ БАКАЛАВРОВ В ОБЛАСТИ ИНФОКОММУНИКАЦИЙ

К 2024 году государство намерено осуществить комплексную цифровую трансформацию экономики и социальной сферы России. Для этого необходимо проделать огромную работу в ключевых областях: разработка законодательства о цифровых технологиях, модернизация цифровой инфраструктуры, внедрение цифровых практик во всех ключевых сферах экономики и госуправления, обеспечить подготовку квалифицированных кадров для переходного периода развития экономики.

Основной целью работы образовательного учреждения как единицы системы образования — обеспечение цифровой экономики компетентными кадрами, мотивированными на освоение необходимых компетенций и способными к участию в развитии цифровой экономики России [1]. Специалисты в области управления и анализа данных, разработчики мобильных приложений и комплексных платформенных решений — кадровый «фундамент» цифровой экономики.

Совершенно очевидно, что цифровая экономика требует от человека/выпускника развития навыков самоорганизации, планирования, самомотивации; этому способствует индивидуализация образования. В стенах СКФ МТУСИ уже с начальных курсов учитываются квалификационные потребности будущего бакалавра в области инфокоммуникаций и учебный процесс строится на основе проблемного обучения в сочетании с личностно-ориентированным подходом, направленным на стимулирование личностного развития студентов, их возможностей, склонностей, интересов [2]. Данный подход реализуется через применение компетентностно-ориентированных заданий, которые базируются на имеющихся знаниях и требуют умения применять их в практической деятельности [3].

Индивидуализация процесса обучения невозможна без широкого использования цифровых технологий, успешно применяемых в СКФ МТУСИ как на этапе освоения нового материала, так и на этапе контроля индивидуальных результатов. Одно из самых прогрессивных и многогранных направлений – создание интерактивной презентации, дающей возможность наглядного предоставления материала в форме диалога с компьютером, где управление информацией и последовательностью просмотра ложится на пользователя преподавателя, выбирающего стратегию изложения материала в зависимости от способности восприятия обучающейся группы. Мультимедийное предоставление информации отличается своей многогранностью и состоит из множества дополнительных элементов:

видео и аудио файлы; инфографика; различные эффекты визуализации (морфинг, параллакс, анимация); навигация (гиперссылки, триггеры).

ЛИТЕРАТУРА

1. РАСПОРЯЖЕНИЕ ПРАВИТЕЛЬСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ от 28 июля 2017 г. № 1632-р ПРОГРАММА «Цифровая экономика Российской Федерации».

http://static.government.ru/media/files/9gFM4FHj4PsB79I5v7yLVuPgu4bvR7M0.pdf

2. *Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Светличная Н. О.* Особенности проблемно-ориентированного обучения бакалавров при изучении общенаучных дисциплин в контексте личностно-ориентированной образовательной парадигмы. Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. 2018. С. 586–589.

3. *Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Светличная Н. О.* Особенности реализации компетентностного подхода в преподавании общенаучных дисциплин в условиях перехода к новым образовательным стандартам. Труды СКФ МТУСИ. Международная научно-практическая конференция СКФ МТУСИ, Ростов-на-Дону. 2019, с.162–166.

Содержание

Секция I Дифференциальные уравнения 17

Секция II Теория функций 29