Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский центр фундаментальной и прикладной математики (МЦФПМ)
Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ (РНОМЦ ЮФУ)
Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ
МОО «Женщины в науке и образовании»
НОУ Учебный центр «Знание»

XXVIII Международная конференция Математика. Экономика. Образование.

XII Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения.

27 мая – 3 июня 2022 г.
Пансионат «Панорама»

Материалы

http://conf-symp.sfedu.ru, e-mail: conf-symp@mail.ru

УДК 330.4+504+37 1Л4
XXVIII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XI Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Ростов н/Д, 2022. — 84 с.
Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к экономике, экологии, естественным наукам. Исследуются аспекты современного образования, без которых невозможно решение этих проблем. Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Международный симпозиум
Ряды Фурье и их приложения

Г. Акишев, А.Х. Мырзагалиева (Нур-Султан, Казахстан)
akishev_g@**mail.ru** , *mir_aigul*@**mail.ru**

ОБ ОЦЕНКАХ M–ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА [1]

Через $L_{p,\tau}$ обозначается пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций f, которые имеют 2π–период по каждой переменной и для которых

$$\|f\|_{p,\tau} = \Big\{\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \big(f^*(t)\big)^{\tau} t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\Big\}^{1/\tau} < +\infty,\ 1 < p < \infty, 1 \leqslant \tau < \infty,$$

$f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in [0,1)^m$. Пусть $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$ и $F_{\overline{r}}(\overline{x})$ — m–мерное ядро Бернулли (см. [1]). Рассмотрим класс $W^{\overline{r}}_{p,\tau} = \{f : f = \varphi \star F_{\overline{r}},\ \|\varphi\|_{p,\tau} \leqslant 1\}$, где $\varphi \star F_{\overline{r}}$– свертка функций φ, $F_{\overline{r}}$. В случае $\tau = p$ класс $W^{\overline{r}}_{p,\tau}$ рассмотрен в [1], [2]). $e_M(f)_{p,\tau}$–наилучшее M–членное тригонометрическое приближение функции $f \in L_{p,\tau}$, $M \in \mathbb{N}$. В докладе будут представлены точные по порядку оценки наилучших M–членных приближений функций класса $W^{\overline{r}}_{q,\tau_1}$ в пространстве L_{p,τ_2} при различных соотношениях между параметрами p, q, τ_1, τ_2. В частности,

Теорема 1. *Пусть* $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \ldots r_m$, $1 < q < 2 < p < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < r_1 < (\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p\tau_1} - \frac{1}{q\tau_2})\tau_2^{'}$, $\tau_2^{'} = \frac{\tau_2}{\tau_2 - 1}$, $a_+ = \max\{0, a\}$. *Тогда*

$$\sup_{f \in W^{\overline{r}}_{q,\tau_1}} e_M(f)_{p,\tau_2} \asymp M^{-\frac{p}{2}(r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (\log_2 M)^{(\nu-1)\frac{p}{\tau_2^{'}}(r_1 - (\frac{1}{q\tau_2^{'}} - \frac{1}{p\tau_1^{'}})\tau_2^{'})_+}.$$

В случае $\tau_1 = q$, $\tau_2 = p$ из полученных результатов следуют теорема 3 [1] и теоремы 2.1 и 2.2 в [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций нескольких переменных// Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 2, С. 301–305.

2. *Белинский Э. С.* Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной//"Исследования по теории функций многих вещественных переменных", Ярославль. 1988, С. 16–33.

[1]Работа первого автора поддержана по грантом AP 08855579 МОН РК.

Б. И. Голубов (Долгопрудный), С. С. Волосивец (Саратов)
golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ СВЕРТОК ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА И ЛОРЕНЦА

Пусть $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, обозначает пространство измеримых по Лебегу на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ функций, для которых норма $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$ конечна. В случае $1 < p \le 2$ преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции $f \in L^p(\mathbb{R})$ определяется как предел при $a \to +\infty$ функции $(2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^{a} f(t) e^{-itx} \, dt$ в норме $L^{p'}(\mathbb{R})$, где $1/p + 1/p' = 1$. Пусть $|\cdot|$ — мера Лебега и f^* — невозрастающая перестановка f, т.е. f^* нестрого убывает на $(0, +\infty)$ и $|\{x \in (0, +\infty) : f^*(x) > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \lambda\}|$ для любого $\lambda > 0$. Тогда при $1 \le p, q < \infty$ пространство Лоренца $L^{p,q}(\mathbb{R})$ (см. [1]) состоит из измеримых на $\mathbb{R}$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty (x^{1/p-1/q} f^*(x))^q \, dx\right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty x^{q/p-1} (f^*(x))^q \, dx\right)^{1/q}.$$

Для функций пространств Лоренца также можно определить преобразование Фурье при $1 < p \le 2$, $1 \le q < \infty$ (см. [1]). Свертка функций $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (т.е. f, g интегрируемы по Лебегу на каждом компакте из $\mathbb{R}$) определяется равенством $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, dy$, если последний интеграл сходится.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1 \le q_1 \le p_1'$, $1 \le q_2 \le p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1 \in (1/2, 1)$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$ *(т.е.* $1/s \ge 1/r'$*). Если* $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R})$, $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R})$, *то* $h = f * g \in L^{r,s}(\mathbb{R})$ *и справедливо неравенство*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^{s/r'-1} |\widehat{h}(x)|^s \, dx\right)^{1/s} \le C \|f\|^*_{L^{p_1,q_1}} \|g\|^*_{L^{p_2,q_2}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1 \le q_1 \le p_1'$, $1 \le q_2 \le p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1 \in (1/2, 1)$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$. *Если* $1 \le \theta < s$, *то существуют* $f_0 \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R})$, $g_0 \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R})$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{r,\theta}(\mathbb{R})$ *и интеграл* $\int_0^\infty x^{\theta/r'-1} |\widehat{h_0}(x)|^\theta \, dx$ *расходится.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. N.Y.: Academic Press, 1988.

М. Г. Григорян, Л.Н.Галоян, С.А.Саргсян (Ереван)
gmarting@ysu.am

ФУНКЦИИ С УНИВЕРСАЛЬНЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ [1]

Верны следующие теоремы

Теорема 1. *Существует функция* $U \in L^1[-\pi,\pi]$, *которая* ***условно универсальна*** *для класса* $L^p[-\pi,\pi]$ *при* $p \in (0,1)$ *относительно тригонометрической системы.*

Теорема 2. *Существует функция* $g(x) \in L^1[0,1]$ *с* $c_k(g)$, $c_k(g) > 0$ *которая является унивесальной в* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ *относительно тригонометрической системы в смысле знаков)>*

Теорема 3. *Существует функция* $f_0(x) \in L^1[0,1]$ *с* $c_k(\ f_0) \searrow 0$, $c_k(\ f_0) > 0$, *такая, что для всякой почти везде конечной функции* $f(x)$ *и для любого числа* $0 < \epsilon < 1$ *можно найти функцию* $g \in L^\infty[0,1), |\{x; g \neq f_0(x)\}| < \epsilon$, *так что* $|c_k(g)| = c_k(f_0), \forall n \in spec(g)$ *и ее ряд Фурье по системе Виленкина ограниченного типа сходится равномерно на [0,1), где* $c_k(g)$, *— коэффициенты Фурье по системе Виленкина функции* $g(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. GrigoryanM. G. , Sargsyan A. A.On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Journal of Func. Anal. 2016. v. 270, ḱ 8. p.3111–3133.

[2]. Grigoryan M. G., Galoyan L. N. On the universal functions //Journal of Approximation Theory 2018. v.225. p.191–208.

[3]. Григорян М. Г. Об универсальных рядах Фурье //Матем. Заметки . 2020.т. 108, 2. с. 296–299.

[4]. Григорян М. Г. Функции, с универсальными рядами Фурье- Уолша //Матем. Сб. 2020. т.211, .6. с.107–131.

[5].Григорян М. Г. ,Галоян Л. Н. , Функции, универсальные относительно тригонометрической системы,Изв. РАН. Серия матем. 2021, 85, 2, 73–94

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

Т. М. Григорян, А. А. Саргсян (Ереван)
t.grigoryan@ysu.am, gmarting@ysu.am

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ УОЛША [1]

Верны следующие теоремы

Теорема 1. *Существуют функция* $U \in L^1[0,1]$ *и весовая функция* $0 < \mu(x) \le 1$ *, такие, что*
а. функция U *является универсальной для каждого класса* $L^p_\mu[0,1]$, $p > 1$ *относительно системы Уолша в смысле подпоследовательностей знаков ее коэффициенты Фурье–Уолша,*
б. ряд Фурье – Уолша функции U *сходится в метрике* L^1*, и ее коэффициенты Фурье–Уолша монотонно убывают,*
в.$|\{x \in [0,1]\ ;\ \mu(x) = 1\}| > 1 - \epsilon$ *, здесь* $\epsilon-$ *наперед заданное произвольное число*

Теорема 2. *Существуют функция* $U \in L^1[0,1]$ *и весовая функция* $0 < \mu(x) \le 1$ *, такие, что*
а. функция U *является универсальной для класса* $L^1_\mu[0,1]$ *относительно системы Уолша в смысле знаков ее коэффициентов Фурье-Уолша.*

(с м . Martin Grigoryan, Tigran Grigoryan and Artsrun Sargsyan, On the universal function for weighted spaces $L^p_\mu[0,1]$, $p \ge 1$*, , Banach J. Math. Anal. Volume 12, Number 1 (2018), 104-125.).*

Замечание. Эти теоремы верны и для системы Виленкина.

С. А. Епископосян (Ереван, Армения)
sepiskoposian@gmail.com

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УОЛША [1]

Пусть $a \ge 2$ фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi i}{a}}$. Обобщенную систему Радемахера порядка a определяется следующим образом (см.[1]):

Положим для $n = 0$

$$\varphi_0(x) = \omega_a^k \quad x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right), \quad k = 0, 1, ..., a-1,$$

а для любого $n \ge 1$, $\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(a^n x)$.

Тогда обобщенная система Уолша порядка a определяется так:

$$\psi_0(x) = 1,$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта N 21AG-1A066.

и если $n = \alpha_1 a^{n_1} + ... + \alpha_s a^{n_s}$, где $n_1 > ... > n_s$, $0 \leq \alpha_j < a$, $j = 1, 2, ..., s$, тогда $\psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{\alpha_1}(x) \cdot ... \cdot \varphi_{n_s}^{\alpha_s}(x)$.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Существует функция $U \in L^1[0,1)$, обладающая следующим свойством: для любых $0 < \epsilon < 1$ и для любой функции $f \in \bigcap_{p>1} L^p$, можно найти функцию $\tilde{f} \in \bigcap_{p>1} L^p$, $mes\{x \in [0,1);\ \tilde{f} \neq f\} < \epsilon$, такую что гриди алгоритм функции $\tilde{f}$, по системе Ψ_a, сходится по всем L^p нормам одновременно и $|c_k(\tilde{f})|\ = c_k(U)$, $\forall k \in spec(\tilde{f})$.*

Функция U обладающая свойствами теорем 1 и 2 назовем L^p-гриди универсальной относительно системы Ψ_a, $a \geq 2$. Некоторые результаты по этим вопросам получены в [2], [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Chrestenson H.E.* A class of generalized Walsh functions // Monatshefte fur Mathematik, Pacific J. Math. 45, 17–31, 1955.

2. *Episkoposian S.,A., Muller J.,* Universality properties of Walsh-Fourier series // Monatshefte fur Mathematik, Springer, v. 175, p. 511–518, 2014.

3. *Episkoposian S.A., Grigorian M.G.,* // L^p-convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system // Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 389, Is. 2, p. 1374-1379, 2012.

Р. А. Ласурия (Москва)
rlasuria67@yandex.ru

О ВЕЛИЧИНАХ ТИПА МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ И АНАЛОГАХ К-ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ

В работе вводятся величины типа модуля непрерывности положительного порядка, определяемого семейством операторов мультипликаторного типа, на основе преобразования соответствующего ряда Фурье-Лапласа и аналоги К-функционалов для классов ?-дифференцируемых функций, заданных на единичной сфере в пространствах (см. например, [1]).

Основные результаты работы содержат утверждения об эквивалентности величин типа модулей непрерывности положительного порядка соответствующим аналогам К-функционалов, устанавливается связь между приближением сферическими полиномами и величинами типа модулей непрерывности в упомянутых пространствах в виде оценок сверху и снизу. Приводятся конкретные реализации полученных результатов в случае классов Соболева, порождаемых дифференциальным оператором Лапласа-Бельтрами на сфере. В качестве вспомогательных утверждений устанавливаются сферические аналоги известных неравенств Стечкина-Никольского в пространствах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ласурия Р.А. Неравенства типа Джексона в пространствах // Матем. заметки, 2019. Т.105, вып. 5, С. 724–739.*

А. А. Лыков (Москва), М. В. Меликян (Москва)
alekslyk@yandex.ru, mv.melikian@gmail.com

РЯДЫ ФУРЬЕ В МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается счётная система гармонических осцилляторов на прямой, где $q_j(t)$, $p_j(t) = \dot{q}_j(t) \in \mathbb{R}$ — отклонение и импульс частицы с номером j соответственно, — удовлетворяют системе ОДУ:

$$\dot{q}_j = p_j,\ \dot{p}_j = -\sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n},$$

функция $a(k)$ удовлетворяет ряду условий, $n \in \mathbb{Z}$ фиксировано, $f(t)$ — случайный процесс, удовлетворяющий следующему условию:

А1) вещественнозначный центрированный стационарный в широком смысле с непрерывной ковариационной функцией.

Рассматриваем начальные условия из гильбертова пространства $L = \{\psi = (q,p) :\ q,\ p \in l_2(\mathbb{Z})\}$. Обозначим $\mu(dx)$ спектральную меру $f(t)$ с некоторым общим и естественным условием А2) на носитель.

Теорема 1. *Пусть верны А1) и А2) и* $\psi(0) = (q(0), p(0)) \in L$. *Тогда существует случайный процесс* $\eta(t) = (q^\infty(t), p^\infty(t))$ *такой, что выполняются следующие условия:*

1. $\eta(t)$ *является решением системы с некоторыми начальными условиями, а каждая компонента* $\eta(t)$ *является стационарным процессом, удовлетворяющим условию А1) и*
   $P(\eta(t) \in L) = 1$ *для всех* $t \geqslant 0$*;*
2. *разность* $\delta(t) = \psi(t) - \eta(t)$ *стремится к нулю при* $t \to +\infty$ *покомпонентно с вероятностью единица, т.е. для всех* k
   $P\left(\lim_{t\to+\infty} \delta_k(t) = 0\right) = 1$, *при этом траектории процесса непрерывны и бесконечно дифференцируемы п.н.;*
3. *существуют положительные константы* c_1, c_2 *и* $0 < r < 1$ *такие, что* $Dq_k^\infty(0) \leqslant c_1 r^{|n-k|}$, $Dp_k^\infty(0) \leqslant c_2 r^{|n-k|}$.

Из сформулированного утверждения, вообще говоря, не следует слабая сходимость компонент $\psi(t)$ к соответствующим компонентам $\eta(0)$, однако стационарности в узком смысле внешней силы для этого уже достаточно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Lykov A. A.* Energy Growth of Infinite Harmonic Chain under Microscopic Random Influence //Markov Processes and Related Fields. 2020. V. 26. P. 287-304.

А. М. Маранджян (Ереван, Армения)
arto.maranjyan@gmail.com

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЯДАХ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА [1]

Для обобщенной системе Хаара имеет место

Теорема. *Пусть* $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *– обобщенная система Хаара. Тодга существует ряд вида* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k(x)$, $a_k \to 0$, *который является универсальным рядом во всех пространствах* $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, *в смысле безусловной сходимости.*

Аналогичный результат для классической системы Хаара получен М. Г. Григоряном [1], а в случае $p = 1$ для системы Фабера–Шаудера: получен в работе [2]. Отметим также, что для обобщенной системы Хаара было получено много результатов (см. в частности [3, 4]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Grigorian M.G.,* // ON UNCONDITIONAL AND ABSOLUTE CONVERGENCE OF THE HAAR SERIES IN THE METRIC OF $L^p[0,1]$ WITH $0 < p < 1$ // Siberian Mathematical Journal, v. 62, n. 4, p. 607–615, 2021.

2. *Grigoryan T.M., Maranjyan A.A.,* // ON THE UNCONDITIONAL CONVERGENCE OF FABER-SCHAUDER SERIES IN L^1 // Proceedings of the YSU A: Physical and Mathematical Sciences, v. 55, n. 1 (254), p. 12–19, 2021. https://doi.org/10.46991/PYSU:A/2021.55.1.012

3. *Grigorian M.G., Maranjyan A.A.,* // On the divergence of Fourier series in the general Haar system // Armenian Journal of Mathematics, v. 13, n. 6, p. 1–10, 2021. https://doi.org/10.52737/18291163-2021.13.6-1-10

4. *Kamont A.,* // General Haar system and Greedy approximation // StudiaMath, v. 145, n.2, p.165–184, 2001. http://dx.doi.org/10.4064/sm145-2-5

В. В. Новиков (Саратов)
vvnovikov@yandex.ru

ДИСКРЕТНЫЕ СУММЫ ФУРЬЕ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ И СОСТОЯТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РЕГРЕССИИ

Рассматривается непараметрическая регрессионная модель вида $Y_i = f(X_i)+\varepsilon_i$, $i = 0, 1, ..., n$, где $f(x)$ — неизвестная функция регрессии, подлежащая оцениванию на основе эмпирических данных $\{(X_i, Y_i)\}_{i=0}^{n}$, $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{n}$ — случайные ошибки. Будем считать, что величина X неслучайна, причем $-1 = X_0 < X_1 < \cdots < X_n = 1$. Через $p_k(x)$, $k = 0, 1, ..., n-1$, обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта N 21AG-1A066.

систему на сетке $\{X_i\}_{i=0}^n$ относительно скалярного произведения $(g,h) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(X_i)h(X_i)\Delta X_i$, $\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$. Возьмем в качестве оценки функции регрессии $f(x)$ частичную сумму порядка $N < n$ ряда Фурье функции f по системе $\{p_k(x)\}$: $\hat{f}_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} (Y, p_k)p_k(x)$, $(Y, p_k) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} Y_i p_k(X_i)\Delta X_i$. О статистических свойствах оценок указанного типа, а также об аппроксимативных свойствах дискретных сумм Фурье для различных ортогональных систем см., например, [1], [2] и приведенную там литературу.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

i) $\mathsf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, *и* $\mathsf{E}\varepsilon_i^2 < C$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *где* C *— некоторая постоянная;*

ii) *функция* $f(x)$ *на отрезке* $[-1, 1]$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* $1/2 < \gamma \leq 1$*;*

iii) $N(n) = O(\delta_n^{-1/5})$, $n \to \infty$, $\delta_n := \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} \Delta X_i$;

iv) $\delta_n = o(n^{-5/8})$, $n \to \infty$.

Тогда оценка $\hat{f}_N(x)$ *является состоятельной для* $x \in [a,b] \subset (-1,1)$, *т.е. при* $N(n) \to \infty$ *для указанных* x *имеем* $\hat{f}_N(x) \xrightarrow{p} f(x)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Greblicki W., Pawlak M.* Nonparametric System Identification. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 313 p.

2. *Нурмагомедов А. А.* Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Владикавк. мат. журн. 2020. Т. 22, вып. 2. С. 34–47.

Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко (Гродно, Беларусь)
rovba.ea@gmail.com pahamatby@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА ОТРЕЗКЕ [1]

Полиномиальная аппроксимация на классах интегралов Пуассона в периодическом случае имеет богатую историю, связанную с именами известных математиков [1–3].

В настоящем докладе планируется осветить круг вопросов, относящихся к рациональной аппроксимации интегралов Пуассона на отрезке $[-1,\ 1]$. В качестве методов приближений рассматриваются рациональные интегральные операторы Фурье–Чебышёва и их суммы Фейера и Валле Пуссена.

Рациональные интегральные операторы типа Фурье, ассоциированные с системой алгебраических дробей Чебышёва–Маркова, были введены в

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ (№ 20162269).

[4]. Они являются обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва. Построены также суммы Фейера и Валле Пуссена указанных выше операторов в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции и исследуются их аппроксимационные свойства на классах интегралов Пуассона на отрезке $[-1,\ 1]$.

Подробно рассматривается случай, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1,\ 1]$ степенную особенность. Как следствие полученных результатов установлены асимптотические выражения точных верхних граней уклонений частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва и методов их суммирования на классах интегралов Пуассона.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Известия АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.

2. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Труды МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.

3. *Степанец А. И.* Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Матем. сборник. 2001. Т. 192, № 1. С. 113–138.

4. *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Доклады АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

Л. С. Симонян (Ереван)
lusine.simonyan@ysu.am

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА [1]

Пусть E измеримое множество и $C(E)$ класс всех непрерывных функций, определенных на E. Пусть далее $\omega(\delta)$, $\delta \in (0,\infty)$ неотрицательная функция с $\omega(+0)=0$,через $H^{\omega}(E)$ обозначается класс всех тех функций $f(x) \in C(E)$ для каждой из которых модуль непрерывность $\omega(f,\delta)$ не превосходит $\omega(\delta)$.

Теорема 1. *Для каждой неотрицательной функции* $\omega(\delta)$, $\delta \in (0,\infty)$ $\omega(+0)=0$. *и для любого* $0<\epsilon<1$ *существует измеримое множество* $E\subset[0,1]$ *с мерой* $\mid E\mid>1-\epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f(x)\in H^{\omega}(0,1]$ *можно найти функцию* $\tilde{f}\in L^{\infty}[0,1]$, *совпадающую с* f *на* E *такое, что ее ряд Фурье-Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на [0,1] и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Хаара расположены в убывающем порядке.*

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066..

Теоремы 1 верны также для любой подсистемы $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$системы Хаара $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$следующего вида $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\chi_{s_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\chi_n(x), n = 2^{k_j} + i, i = 1, ...2^{s_j}$,где $\{k_j\}_{j=1}^{\infty} \nearrow^{\infty}$наперед заданная возрастающая подпоследовательность натуральных чисел.

Теорема 2. *Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции $f(x)$ и для любого $0 < \epsilon < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^{\infty}[0,1]$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, что ее ряд Фурье по подсистеме $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ системы Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на [0,1] , и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по подсистеме $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке.*

А. П. Солодов (Москва, МГУ)
apsolodov@mail.ru

АСИМПТОТИКА СУММЫ СИНУС-РЯДА В РЕГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ[1]

В [1] получен главный член асимптотического поведения суммы ряда по синусам $g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ с выпуклой, медленно меняющейся последовательностью коэффициентов $\boldsymbol{b}$, а именно: $g(\boldsymbol{b}, x) \sim b_{m(x)}/x$, $x \to +0$, где $m(x) = [\pi/x]$. В данной работе исследуется случай, когда поведение последовательности $\boldsymbol{b}$ в дополнение к выпуклости и медленному изменению более-менее регулярно. Оказывается, что при дополнительном требовании медленного изменения последовательности $\{k\Delta b_k\}_{k=1}^{\infty}$ для суммы ряда по синусам можно выписать два первых члена асимптотического разложения.

Теорема. *Пусть $\boldsymbol{b}$ — неотрицательная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Если $\{k\Delta b_k\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая, медленно меняющаяся последовательность, то*

$$g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{x} \sim (\gamma + \ln \pi) \frac{m(x)\Delta b_{m(x)}}{x}, \quad x \to +0.$$

Здесь и далее через γ обозначена постоянная Эйлера.

Следствие. *Пусть $b(t)$ — неотрицательная, выпуклая и дифференцируемая функция, стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$. Если функция $-tb'(t)$ не возрастает и медленно меняется, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b(k) \sin kx - \frac{b\,(1/x)}{x} \sim -\gamma\, \frac{b'\,(1/x)}{x^2}, \quad x \to +0.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00584).

Пример. Имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln(k+1)} = \frac{1}{x\ln(1/x)} + \frac{\gamma}{x\ln^2(1/x)} + o\left(\frac{1}{x\ln^2(1/x)}\right), \quad x \to +0.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // Publ. Inst. Math. Serbe Sci. 1956. V. 10. P. 101–120.

А. Ю. Трынин (Саратов)
tayu@rambler.ru

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕНИЙ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ

Рассмотрим процессы Лагранжа-Штурма-Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}, \tag{1}$$

где U_n есть $n-$ая собственная функция задачи Штурма-Лиувилля $U'' + [\lambda - q]U = 0$, $U'(0) - hU(0) = 0$, $U'(\pi) + HU(\pi) = 0$ с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0,\pi]$ и условиями $h \neq \pm\infty$, $\quad H \neq \pm\infty$. Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n. Определим функцию

$$p(x) := \sum_{x_{k,n} \leq x} 1 - 1 \equiv \pi\left\{1 + \left[\frac{-|U_n(\cdot)|}{2\|U_n\|_{C[0,\pi]}}\right]\right\}(x)/2$$

$$+ \left(1 + \left[\frac{-|U_n(x)|}{2\|U_n\|_{C[0,\pi]}}\right]\right)/2 - 1 \tag{2}$$

Здесь $\pi\{f\}(x) = V_0^x f$, а $[\cdot]$- целая часть числа. В следующей теореме получена оценка погрешности приближения произвольной непрерывной функции с помощью модификации операторов (1).

Теорема 1. *Пусть непрерывный потенциал q задачи Штурма-Лиувилля имеет ограниченную вариацию, функция $f \in C[0,\pi]$, $0 \leq a < b \leq \pi$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, а функция $p(x)$определяется соотношением (2). Тогда равномерно по $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ имеет место следующая асимптотическая формула*

$$f(x) - \Big(L_n^{SL}(f,x) +$$

$$\frac{U_n(x)}{2\pi} \sum_{m=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{f(x_{2m+1,n}) - 2f(x_{2m,n}) + f(x_{2m-1,n})}{(p(x)-2m)^{sign^2(p(x)-2m)}} sign^2(p(x)-2m)\Big)$$

$$= O\left(\omega\left(f, \frac{\ln n}{n}\right) + \|f\| \frac{\ln n}{n}\right).$$

Константа равномерности в o-символике зависит от $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, *а от выбора функции* f *не зависит.*

Ю. А. Фарков (Москва)
farkov-ya@ranepa.ru

НОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ ВСПЛЕСКОВ И ФРЕЙМОВ В АНАЛИЗЕ УОЛША

Основы теории всплесков в анализе Уолша изложены в монографии [1], а элементы этой теории содержатся в книгах [2] и [3]. В докладе предполагается обсудить несколько новых конструкций всплесков и фреймов, ассоциированных с функциями Уолша (см. [4]-[6] и цитированную в этих работах литературу).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H.* Construction of Wavelets through Walsh Functions / Industrial and Applied Mathematics. Singapore: Springer, 2019. 382 p.

Ю. Х. Хасанов (Душанбе, Таджикистан)
yukhas60@mail.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТИПА СВЕРТКИ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ S_p

Пусть S_p — пространство периодических периода 2π интегрированных по Лебегу функций $f(x)$, для которых сходится ряд

$$\sum_{k\in Z} |c_k|^p \quad \left(c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) exp(-ikx) dx\right),$$

с нормой

$$\|f(x)\|_{S_p} = \left(\sum_{k\in Z} |c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \ (1 \le p < \infty).$$

С помощью функции $\sigma(u)$, которая задана на всей действительной оси и тождественно не равна нулю на $(-\infty, \infty)$, и которая является функцией ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, для каждой функции $f(x) \in S_p$ рассматривается преобразование вида

$$F_\sigma(f; x, h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - hu) d\sigma(u),$$

где h — действительный параметр, а функция $\sigma(u)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u) = 0, \ \ \widehat{\sigma}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-iux) d\sigma(u), \ \ \widehat{\sigma}(-u) = \widehat{\sigma}(u).$$

С помощью этого преобразования $F_\sigma(f;x,h)$, для каждой функции $f(x) \in S_p$ рассматривается характеристика $D(f;\sigma;h;p) = \|F_\sigma(f;x,h)\|_{S_p}$, для которой ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{k \in Z} c_k \widehat{\sigma}(kh) exp(ikx)$, где $\{c_k\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Исследуется вопрос о зависимости между величиной $D(f;\sigma;h;p)$ и наилучшими приближениями функции тригонометрическими полиномами. Получены оценки сверху и снизу для рассматриваемой свертки в зависимости от величины наилучшего приближения функций $f(x) \in S_p$ $(1 \le p < \infty)$.

В. И. Щербаков (Жуковский)
kafmathan@mail.ru (для В.И.Щербакова)

РАСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА В ТОЧКАХ НЕУСТРАНИМОГО РАЗРЫВА ПЕРВОГО РОДА

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}-$ целочисленная последовательность с $p_n \ge 2$ и $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n',$$

где a_k, s и $n'-$ целые с $0 \le a_k < p_{k+1}; 1 \le a_s < p_{s+1}; 0 \le n' < m_s$, а любое действительное число $x \in [0,1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \text{ где } x_n - \text{ целые с } 0 \le x_n < p_n \tag{1}$$

Если x — p_n-иррационально, а также $x = 0$ или $x = 1$, то его представление в виде равенства (1) единственно; для $x = \frac{l}{m_n}$ имеется два его разложения по формуле (1), одно из которых — конечно ($x_k = 0$ при $k > n$), которое мы обозначим за $\frac{l}{m_n}$, а другое — бесконечно ($x_k = p_k - 1$ для $k > n$); его будем записывать как $\frac{l}{m_n} -$. Таким образом, отрезок $[0,1]$ перешел во множество последовательностей G. Топология в ней определена в [1]. Положив $\frac{l}{m_n} - < \frac{l}{m_n}$, с $[0,1]$ на G переносится понятие упорядочивание точек, и, следовательно, задаются точки разрыва первого рода. Обозначим за Γ определённую в [1] обобщённую систему Хаара. Справедлива следующая

теорема. *Ряд Фурье от функции $f(x)$ расходится во всякой неустранимой точке разрыва первого рода.*

Для систем Хаара, которыя являются частным случаем системы Г для $p_n \equiv 2$, подобный результат был получен Фабером и П.Л.Ульяновым (см., напр., [2]).

Литература

[1]. **В.И.Щербаков.** *Признак Дини-Липшица для обобщённых систем Хаара.* Изв. Сар. Ун-та, сер."Матем., Мех., Информ.", 2016, т.16, вып.4, стр. 435–448.

[2]. **П.Л.Ульянов.** *О рядах по системам Хаара,* Матем., сб., 1964, т.64, №3, стр. 356–391.

Секция I
Дифференциальные уравнения

И. А. Андреева, Т. О. Ефимова (Санкт-Петербург)
substress@mail.ru

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ПОДСЕМЕЙСТВ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В процессе качественного исследования широкого семейства кубических динамических систем со взаимно простыми полиномиальными правыми частями предпринимается расщепление его на подсемейства четырех иерархических уровней. Первый этап расщепления проводится в зависимости от вида разложений полиномов, стоящих в правых частях уравнений системы, на множители нижайших степеней, второй – в зависимости от наличия либо отсутствия кратных корней у привязанных к правым частям системы специальных характеристических полиномов. На очередных этапах расщепление базируется на свойствах открывающейся качественной картины фазовых траекторий систем подсемейства. Определяющим здесь становится фактор единственности продолжения имеющихся сепаратрис из некоторой (малой) окрестности особой точки системы на всю их длину Каждое из выделенных иерархических подсемейств поддается исследованию по единой схеме и позволяет установить строгую картину его фазовых траекторий в круге Пуанкаре.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Андреева И. А., Андреев А. Ф.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. III. // Вестник РАЕН. 2019. Том 19. № 2. С. 20–24.

3. *Andreeva I. A., EfimovaT. O.* Classes of Dynamic Systems with Various Combinations of Multipliers in Their Reciprocal Polynomial Right Parts. // IOP Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2090.

4. *Andreeva I. A., EfimovaT. O.* On the qualitative study of phase portraits for some categories of polynomial dynamic systems. // Studies of Systems, Decision and Control, Vol. 418. Cyber-Physical Systems: Modelling and Industrial Application, pp. 39–50. Springer, 2022.

С. Н. Асхабов (Грозный)
askhabov@yandex.su

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ [1]

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int_0^x h(x-t)u(t)\,dt + \int_0^x k(x-t)u'(t)\,dt, \quad x>0, \quad \alpha>1, \tag{1}$$

при начальном условии

$$u(0)=0, \tag{2}$$

где неотрицательные на $[0,\infty)$ ядра $h(x)$ и $k(x)$ таковы, что:

$$h(x) \text{ и } k'(x) \text{ не убывают, } k(0)=0 \text{ и } P=h(0)+k'(0)>0. \tag{3}$$

Уравнение (1) тесно связано с интегральным уравнением, возникающим при описании процессов инфильтрации жидкости через стенки цилиндрического резервуара, распространении ударных волн в трубах, наполненных газом, остывании тел при лучеиспускании, отвечающему закону Стефана-Больцмана, и др. (см. [1], [2]). В связи с этими приложениями решения задачи (1)-(2) ищутся в классе:

$$Q_0^1 = \left\{ u(x) : u \in C[0,\infty) \cap C^1(0\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0 \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (3). Тогда начальная задача (1)-(2) имеет единственное решение в конусе Q_0^1, причем*

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}Px\right)^{1/(\alpha-1)} \le u(x) \le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [h(t)+k'(t)]u(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Изучен вопрос о приближенном решении задачи (1)-(2). Доказано, что решение можно найти методом последовательных приближений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. Vol. 4, № 2. P. 51–74.

2. *Асхабов С. Н.* Система интегро-дифференциальных уравнений типа свёртки со степенной нелинейностью // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 3. С. 5–18.

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ по проекту: Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи (FEGS-2020-0001)

С. А. Бутерин (Саратов)
buterinsa@sgu.ru

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Пусть $j \in \{0,1\}$, а $\{\lambda_{n,j}\}$ – спектр краевой задачи $B_j(q)$ вида

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0,$$

где $q(x)$ – комплексная функция из $L_2(0,\pi)$, и $q(x) = 0$ п.в. на $(0,a)$.

Задача 1. Заданы $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$, найти $q(x)$.

В [1] получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой обратной задачи при $a \in (2\pi/5, \pi)$, в то время как при $a \in (0, 2\pi/5)$ ее решение не единственно (см. [2] и литературу там).

Получена равномерная устойчивость задачи 1 при $a \in (2\pi/5, \pi)$.

Теорема 1. *Для всякого $r > 0$ найдется $C_r > 0$, такое что*

$$\|q - \tilde{q}\|_{L_2(a,\pi)} \le C_r(\|\{\lambda_{n,0} - \tilde{\lambda}_{n,0}\}\|_{l_2} + \|\{\lambda_{n,1} - \tilde{\lambda}_{n,1}\}\|_{l_2}),$$

если $\|\{\lambda_{n,j} - (n-j/2)^2\}\|_{l_2} \le r$, $\|\{\tilde{\lambda}_{n,j} - (n-j/2)^2\}\|_{l_2} \le r$, $j = 0,1$, где $\{\tilde{\lambda}_{n,j}\}$ – спектр $B_j(\tilde{q})$, а средние значения $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ равны нулю.

Отметим, что равномерная устойчивость классической обратной задачи Штурма–Лиувилля ($a = 0$) получена в [3]. Мы используем иной подход, опирающийся на равномерную устойчивость восстановления характеристических функций задач $B_j(q)$ по их нулям, являющуюся частным случаем общего результата в [4]. Отличием теоремы 1 от классического случая [3] является комплекснозначность $q(x)$, а также возможность пересечения спектров $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Buterin S.A., Malyugina M.A., Shieh C.-T.* An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays // Appl. Math. Comp. 2021. V. 411. Art. № 126475.

2. *Djurić N., Buterin S.* Iso-bispectral potentials for Sturm–Liouville-type operators with small delay // Nonlin. Anal.: RWA 2022. V. 63. Art. № 103390.

3. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 4. С. 34–53.

4. *Бутерин С.А.* О равномерной устойчивости восстановления функций типа синуса с асимптотически отделенными нулями // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 339–353.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-21-00509).

Т. В. Капицына (Москва)
kapitsynatv@mpei.ru

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ ТИПА ХАРДИ

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, где основание Ω является областью с ляпуновской границей, рассматривается вырождающееся параболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f$$

с коэффициентами $a_{ij}(x,t)$, $a_i(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $a(x,t) \in C(\overline{Q})$ и правой частью $f(x,t) \in L_{p,\,\mathrm{loc}}(Q)$. При этом вырождение на боковой границе предполагается трикомовского типа, т.е. выполняется неравенство

$$c \le \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\nu_i \nu_j \le c^{-1}, \quad x \in \partial\Omega,$$

с некоторой постоянной $c > 0$, где $\nu(x)$ — вектор внешней по отношению к Ω единичной нормали к поверхности $\partial\Omega$ в точке x.

Вводятся классы типа Харди H_p решений этого уравнения, для которых устанавливаются аналоги теорем Рисса и Литтлвуда- Пэли. Доказывается теорема об однозначной разрешимости первой смешанной задачи в случае, когда граничная и начальная функции принадлежат пространствам типа L_p.

Э. В. Кораблина, В. Б. Левенштам (Ростов-на-Дону)
korablina@sfedu.ru, vblevenshtam@sfedu.ru

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ДАННЫМИ

В работе рассматривается задача Коши для волнового уравнения с младшим членом, зависящая от большого параметра ω:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \frac{1}{\omega} a(x,t,\omega t) u(x,t) = f(x,t) r(t,\omega t) \\ u(x,t)|_{t=0} = 0 \\ u_t(x,t)|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

Младший коэффициент и правая часть уравнения быстро осциллируют по времени. При заданных функциях a, f и r установлена асимптотика решения этой задачи (см.теорему 1). После этого предполагается, что функции a и r заданы, а f не известна. В этом случае поставлена и решена асимптотическая обратная задача об восстановлении функции f по значениям коэффициентов трёхчленной асимптотики решения, вычисленных в некоторой точке пространства. Соответствующий результат об однозначной разрешимости поставленной задачи является основным в работе и сформулирован в виде теоремы 2.

В работе применяется неклассический подход [1-2] к постановке и решению асимптотических обратных коэффициентных задач с высокочастотными данными, лежащий на стыке двух дисциплин− асимптотические методы и обратные задачи. В связи с этим исследование задачи разбивается на две части: построение частичной асимптотики решения исходной задачи и постановка и решение асимптотической обратной задачи.

В заключении отметим, что классическая теория обратных коэффициентных задач изложена в большом числе монографий и статей (см., например, [3-4] и библиографию в них).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П.* Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 12. С. 1955–1965.

2. *Левенштам В. Б* Параболические уравнения с большим параметром.Обратные задачи // Матем. заметки. 2020. Т. 107, № 3. С. 107.

3. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики // М: Наука. 1984. с.458.

4. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач // Москва: Издво: МГУ. 1994. с.206.

М. А. Кузнецова (Саратов)
kuznetsovama@info.sgu.ru

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ ПО СПЕКТРУ [1]

Рассмотрим краевую задачу Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом:

$$-y''(x) + p(x)y(x) + q(x)y(a) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $p, q \in L_2(0, \pi)$ и $a \in [0, \pi]$. Краевая задача вида (1) в частном случае $a = 0$ с периодическими краевыми условиями изучалась в статье [1].

Пусть $S(x, \lambda)$ — решение уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y''(x) + p(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-21-00509, https://rscf.ru/project/22-21-00509/)

при начальных условиях $S(a,\lambda)=0$, $S'(a,\lambda)=1$. Обозначим через $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 1}$ последовательность собственных значений (2)–(3).

Теорема 1. *Для собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ краевой задачи (1)–(2) справедливы следующие асимптотики:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + nS(\pi,\lambda_n^0)\varkappa_n,\ n\geq 1, \quad \{\varkappa_n\}_{n\geq 1}\in \ell_2.$$

Изучим обратную задачу восстановления функции q в (1) по последовательности $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, если функция p задана. Применяя подход, предложенный в [2] для исследования обратной задачи в частном случае $p=0$, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Обозначим через $\{\tilde\lambda_n\}_{n\geq 1}$ собственные значения краевой задачи (1)–(2), где вместо q берется $\tilde q$. Пусть $S(\pi,\lambda_n^0)\neq 0$, $n\geq 1$. Тогда из равенства $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}=\{\tilde\lambda_n\}_{n\geq 1}$ следует, что $q=\tilde q$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Поляков Д. М.* О нелокальном возмущении периодической задачи для дифференциального оператора второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 14–21.

2. *Кузнецова М. А.* Характеризация спектра оператора Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом // Уфимская осенняя математическая школа-2021: Материалы международной научной конференции. Т.1. Уфа: Научно-издательский центр «Аэтерна», 2021. С. 48–50.

А. Б. Муравник (Москва)
amuravnik@mail.ru

ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ: РЕШЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ [1]

Интерес к задачам в полупространстве для эллиптических уравнений обусловлен тем, что, несмотря на эллиптичность уравнения, одна из независимых переменных (а именно, та переменная, направление которой ортогонально краевой гиперплоскости) приобретает так называемые *времениподобные* свойства: разрешающий оператор обладает полугрупповым свойством и имеет место стабилизация решений при стремлении вышеуказанной времениподобной переменной к бесконечности.

Это явление имеет место и в классическом случае *дифференциальных* уравнений, однако настоящая лекция будет посвящена указанным задачам для дифференциально-разностных уравнений (т. е. уравнений, содержащих, кроме дифференциальных операторов, операторы сдвига).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00288).

Как и в классическом дифференциальном случае, вполне обоснованно разделять такие задачи на два типа: задачи с *ограниченными* краевыми функциями и задачи с *суммируемыми* краевыми функциями (в частности, в задачах второго типа возможны только решения с конечной энергией). Эти два исследовательских направления развиваются неравномерно — пока что первое направление имеет существенное опережение. Однако ряд результатов получен к настоящему времени и для задач с *суммируемыми* краевыми функциями, и в настоящей лекции будет изложено современное состояние указанной теории.

В. Н. Самохин (Москва)
avt428212@yandex.ru

Уравнения МГД-пограничного слоя неньютоновской вязкой среды с условием дифракции

Предполагается, что область $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ разделена кривой $\gamma = \{(x, y) : y = y_*(x) > 0, 0 \leqslant x \leqslant X\}$ на области $D_1 = \{0 < x < X, 0 < y < y_*(x)\}$, $D_2 = \{0 < x < X, y_*(x) < y < \infty\}$. В области D_i, $i = 1, 2$, рассматривается система уравнений

$$u_i u_{ix} + v_i u_{iy} = \nu_i(1 + 3(2 - i)k(u_{iy})^2)u_{iyy} - p_x(x)/\rho_i -$$

$$-(\sigma_i/\rho_i)B(x)(u_i B(x) + E(x)), u_{ix} + v_{iy} = 0.$$

Известная скорость $U(x) > 0$ внешнего течения связана с давлением $p(x)$ и электромагнитными характеристиками жидкости соотношением

$$-p_x(x) - \sigma_2 B(x)E(x) = \rho_2 U(x)U_x(x) + \sigma_2 B^2(x)U(x).$$

На границе области D задаются условия, естественные для теории пограничного слоя, и некоторые условия сопряжения физических характеристик на линии $y = y_*(x)$. При этом функция $y_*(x)$ считается одним из неизвестных рассматриваемой задачи и

$y'_*(x) = v_1(x, y_*(x))/u_1(x, y_*(x)) = v_2(x, y_*(x))/u_2(x, y_*(x))$.

Доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи. При достаточно сильном магнитном поле $B(x)$ точка отрыва пограничного слоя сдвигается вниз по потоку.

Реологическая модель рассматриваемой неньютоновской среды предложена в [1]. Задача, аналогичная приведенной здесь, ранее была решена в [2]. В настоящей заметке мы следуем, в основном, [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ладыженская О. А.*Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, Физматлит, 1970. 288 с.

2. *Самохин В. Н.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией дилатантной среды //Дифференц. уравнения. 2010, Т. 46, № 6, с. 846–858.

3. *Kisatov M. A., Samokhin V. N., Chechkin G. A.* On solutions to equations of magnetohydrodynamic boundary layer with an injection of a medium obeying the Ladyzhensrfya rheological law//J. of Mathematical Sciences, Vol. 260, No. 6, February 2022, pp. 774 – 797.

A. L. Skubachevskii (Moscow)
skublector@gmail.com

STATIONARY SPHERICALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF THE VLASOV–POISSON SYSTEM IN THE THREE–DIMENSIONAL CASE [1]

We consider the Vlasov–Poisson system of equations in the three–dimensional case, which is modelling distribution of gravitating matter in stellar dynamics. A stationary spherically symmetric solution of this system is a triple (f, ρ, U) of three functions: the distribution function $f = f(r, u)$, the local density $\rho = \rho(r)$, and the Newtonian potential $U = U(r)$, where $r = |x|$, $u = |v|$, $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ are the space–velocity coordinates. In this lecture we consider the following problem: for a given function $p = p(r)$ we obtain sufficient conditions for p to be "extendable", which means that there exists a stationary spherically symmetric solution (f, ρ, U) of the Vlasov–Poisson system with f depending on the local energy $E := U(r) + \dfrac{u^2}{2}$ such that $\rho = p$, see [1].

B I B L I O G R A P H Y

1. *J.Batt, E.Jörn, A. L. Skubachevskii* Stationary Spherically Symmetric Solutions of Vlasov–Poisson System in the Three–Dimensional Case//Doklady Mathematics, 2020, V. 102, P. 265–268.

А. П. Солдатов (Москва)
soldatov48@gmail.com

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ

Обсуждаются достаточные условия выполнимости основной теоремы Фаддеева-Марченко. Приводится представление решения обратной задачи Штурма-Лиувилля на всей оси, основанное на исследовании краевой задачи для функций Йоста и соответствующего ей сингулярного интегрального уравнения. Доказывается однозначная разрешимость этой задачи в соответствующих весовых классах Гельдера.

---

[1]This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

О. В. Солонуха (Москва)
solonukha@yandex.ru

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ $(X;W)$–ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА [1]

Понятие $(X;W)$–полуограниченной вариации оператора впервые было сформулировано Ю.А.Дубинским [1] и применено им для исследования разрешимости смешанных краевых задач для квазилинейных параболических дифференциальных уравнений. В настоящем докладе мы используем технику операторов с $(X;W)$–полуограниченной вариацией для доказательства разрешимости смешанных краевых задач для нелинейных параболических дифференциально–разностных операторов. Ранее параболические уравнения и неравенства для нелинейных дифференциальных и квазилинейных дифференциально–разностных операторов с $(X;W)$–полуограниченной вариацией были рассмотрены в работах [2–4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ю.А. Дубинский,* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки и техники: ВИНИТИ. Современные проблемы математики, 1976, вып. 9, С. 5–130.

2. *Солонуха О.В.* О нелинейной параболической задаче с препятствием // УМН, 2004, Т. 59, вып. 3, С. 181–182.

3. *Солонуха О.В.* О разрешимости односторонних параболических задач и вариационных неравенств// Труды семинара им. И.Г.Петровского, 2005, вып. 24, С. 250–303.

4. *Solonukha O.V.* The first Boundary Value Problem for Quasilinear Parabolic Differential–Difference Equations// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, **42**:5, 1067–1077.

К. В. Фордук (Симферополь)
forduk_kv@mail.ru

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ИДЕАЛЬНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГИХ И ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ

Исследуется двумерная задача о малых движения системы тел, последовательно соединённых пружинами, первое и последнее тела прикреплены пружинами к двум опорам с заданным законом движения. Каждое тело представляет собой открытый сосуд, частично заполненный идеальной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер темы FSSF-2020-0018).

жидкостью. Демпфирующие силы порождаются трением тел о неподвижную горизонтальную опору. Исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Изучаются свойства операторных матриц, являющихся коэффициентами полученного дифференциального уравнения. Доказывается теорема об однозначной разрешимости исследуемой начально-краевой задачи на положительной полуоси (см. [2]).

В задаче о нормальных колебаниях системы установлено, что спектр исследуемой задачи расположен в некоторой вертикальной полосе, состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, и симметричен относительно действительной оси. Также доказано, что собственные значения задачи имеют степенное асимптотическое распределение, а система корневых элементов задачи образует базис Абеля-Лидского со скобками (см. [3]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.

2. *Forduk K. V., Zakora D. A.* Problem on small motions of a system of bodies filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, № 5. P. 889–900.

3. *Forduk K. V., Zakora D. A.* A problem of normal oscillations of a system of bodies partially filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. Vol. 18, № 2. P. 997–1014.

Секция II
Теория функций

О. Г. Авсянкин (Ростов–на–Дону)
ogavsyankin@sfedu.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ В КЛАССАХ С АСИМПТОТИКАМИ [1]

Пусть $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$. Обозначим через $C(\mathbb{B}_n)$ пространство всех непрерывных на $\mathbb{B}_n \setminus \{0\}$ комплекснозначных функций, для которых предел в точке $x = 0$ существует и конечен.

В пространстве $C(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{B}_n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \tag{1}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ и удовлетворяет следующим условиям:

1°) $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y)$ для любого $\alpha > 0$;

2°) $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y)$ для любого $\omega \in SO(n)$;

3°) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,y)|(1 + |\ln|y||)^{\nu}\,dy < \infty, \quad e_1 = (1,0,\ldots,0)$,

где ν — фиксированное неотрицательное число.

Определение 1. *Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \delta < 1$ и $s \in \mathbb{Z}_+$. Класс $\boldsymbol{A}^{\alpha}_{s,\delta}(\mathbb{B}_n)$ — это совокупность всех функций $g \in C(\mathbb{B}_n)$, для которых при $|x| < \delta$ справедливо представление*

$$g(x) = b + \sum_{j=0}^{s} \frac{b_j}{(1 - \ln|x|)^{j+\alpha}} + \frac{v(x)}{(1 - \ln|x|)^{s+\alpha}},$$

где $v \in C(\mathbb{B}_n(\delta))$ и $\lim\limits_{x \to 0} v(x) = 0$.

Доказано, что если $s \leqslant [\nu] - 1$, то класс $\boldsymbol{A}^{\alpha}_{s,\delta}(\mathbb{B}_n)$ инвариантен относительно оператора K, т. е. $K(\boldsymbol{A}^{\alpha}_{s,\delta}(\mathbb{B}_n)) \subset \boldsymbol{A}^{\alpha}_{s,\delta}(\mathbb{B}_n)$.

Далее, в пространстве $C(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим уравнение $\varphi = K\varphi + f$. Пусть $f \in \boldsymbol{A}^{\alpha}_{s,\delta}(\mathbb{B}_n)$, где $s \leqslant [\nu] - 1$. Показано, что если оператор $I - K$ является нетеровым, и данное уравнение разрешимо в пространстве $C(\mathbb{B}_n)$, то $\varphi \in \boldsymbol{A}^{\alpha}_{s,\delta}(\mathbb{B}_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Avsyankin O.* Asymptotic Behavior of Solutions of Integral Equations with Homogeneous Kernels // Mathematics. 2022, V. 10, Issue 2, 180.

[1] Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, Соглашение Минобрнауки России № 075–02-2022-893.

С. С. Ашихмин (Ростов-на-Дону)
sashihmin@sfedu.ru

КРИТЕРИИ НЕТЕРОВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ И ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть K — оператор вида

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, ядро $k(x,y)$ которого суммируемо, однородно степени $(-n)$ и инвариантно относительно группы вращений $SO(n)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — наименьшая C^*-подалгебра C^*-алгебры всех линейных ограниченных в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ операторов, содержащая операторы A вида

$$A = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j} K_j + T,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, M_{a_j} — оператор умножения на радиальную слабо осциллирующую функцию a_j, K_j — оператор вида (1), а T — компактный в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор.

Рассматривается C^*–алгебра $\mathfrak{B}$, которая является расширением алгебры $\mathfrak{A}$ операторами умножения на функции $|x|^{i\alpha}$. Для исследования алгебры $\mathfrak{B}$ используется подход А. Б. Антоневича, основанный на теории C^*-алгебр, порожденных динамическими системами ([1, гл. II]). Этот подход позволяет построить для алгебры $\mathfrak{B}$ операторное символическое исчисление, в терминах которого получен критерий нетеровости операторов из этой алгебры. В заключительной части выделен класс операторов из алгебры $\mathfrak{B}$, для которых указано скалярное условие нетеровости и формула для вычисления их индекса.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. Минск: Изд-во «Университетское», 1988. 232 с.

М. В. Балашов (Москва)
balashov73@mail.ru

НЕРАВЕНСТВО ЛЕЖАНСКОГО-ПОЛЯКА-ЛОЯСЕВИЧА И СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА [1]

Рассматривается неравенство Лежанского-Поляка-Лоясевича для вещественно-аналитической функции на вещественно-аналитическом компактном многообразии без края в конечномерном евклидовом пространстве. Это неравенство возникло независимо в 1963 году в работах трёх авторов: Лежанского и Лоясевича из Польши и Поляка из СССР. Неравенство оказалось очень полезным инструментом для исследования сходимости градиентных методов, первоначально в безусловной оптимизации, а в течение последних нескольких десятилетий и в задачах условной оптимизации. Главным образом оно применяется для гладких в определенном смысле функций на гладких в определенном смысле многообразиях. Мы предлагаем вывод неравенства из условия ограничения ошибки [1] степенного типа на компактном вещественно-аналитическом многообразии. В качестве приложения доказывается сходимость метода проекции градиента вещественно-аналитической функции на вещественно аналитическом компактном многообразии без края. В отличие от известных результатов [2], наше доказательство даёт явную зависимость погрешности через параметры задачи. При этом мы существенно используем технический факт, что гладкое компактное многообразие без края есть проксимально гладкое множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Balashov M. V.* Stability of Minimization Problems and the Error Bound Condition // Set-Valued Var. Anal (2022). https://doi.org/10.1007/s11228-022-00634-3.

2. *Schneider R., Uschmajew A.* Convergence results for projected line search methods on varieties of low-rank matricies via Lojasiewicz inequality // SIAM J. OPTIM., 2015, vol. 25, iss. 1, 622–646.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-11-00042).

Б. Б. Беднов (Москва)
noriiii@inbox.ru

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, В КОТОРЫХ КЛАСС ЧЕБЫШЕВСКИХ МНОЖЕСТВ СОВПАДАЕТ С КЛАССОМ ЗАМКНУТЫХ И МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — действительное банахово пространство. Множество $M \subset X$ называется чебышёвским, если для каждого $x \in X$ существует и единствен ближайший к x элемент в M.

Непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, в банаховом пространстве X называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ монотонна по τ для любого функционала $f \in \operatorname{ext} S^*$. Множество называется *монотонно линейно связным* (см. [1]), если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве.

Монотонная линейная связность является более слабым свойством, чем выпуклость, и более сильным, чем линейная связность. Каждое выпуклое множество является монотонно линейно связным.

В двумерном нормированном пространстве X_2 класс чебышёвских множеств совпадает с классом замкнутых и монотонно линейно связных множеств тогда и только тогда, когда X_2 строго выпукло [2].

Теорема [3] **.** *Пусть X_n — нормированное пространство конечной размерности $n \ge 3$. Следующие три условия эквивалентны:*

1) в X_n класс чебышёвских множеств совпадает с классом замкнутых и монотонно линейно связных множеств;

2) в X_n класс чебышёвских множеств совпадает с классом замкнутых и выпуклых множеств;

3) X_n гладко и строго выпукло.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Алимов А. Р.* Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Математический сборник, 2006. Т. 197, № 9. С. 3–18.

2. *Hetzelt L.* On suns and cosuns in finite dimensional normed real vector spaces // Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1985. Vol. 45, № 1-2. P. 53–68.

3. *Беднов Б. Б.* Конечномерные пространства, в которых класс чебышёвских множеств совпадает с классом замкнутых и монотонно линейно связных множеств // Математические заметки, 2022. Т. 111, № 4, С. 483–493.

Г. Г. Брайчев (Москва)
braichev@mail.ru

О НУЛЯХ И ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В теории роста целых функций исторически сложились два направления. В одном из них характеристики роста максимума модуля оцениваются по коэффициентам ряда Тейлора. В другом – исследуется зависимость роста функции от распределения её нулей.

В докладе приводятся непостредственные, прямые связи между ростом нулуй и убыванием тейлоровских коэффициентов целой функции. Чтобы дать представление о чем будет идти речь, введем необходимые определения.

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\, z^n$ – целая функция. Считаем, что f имеет бесконечно много нулей $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $f_0 = f(0) = 1$. Последовательность нулей запишем в порядке неубывания модулей и с учетом кратностей. Через $N_f(r)$ обозначим усредненную считающую функцию нулей f, а через $M_f(r)$– максимум модуля этой функции в круге $|z| \leqslant r$.

Опишем интересующие нас характеристики роста целой функции. Тип и нижний ρ-тип целой функции определяются соответственно формулами

$$T = T_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}, \qquad t_\rho = t_\rho(f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}.$$

Следуя терминологии Валирона, говорим, что целая функция имеет совершенно регулярный рост, если ее тип и нижний тип совпадают, т. е. если $T_\rho = t_\rho$.

Теперь определим величины, характеризующие поведение последовательности нулей целой функции f, т. е. последовательности Λ.

Верхняя и нижняя усредненные ρ-плотности Λ определяются соответственно формулами:

$$\overline{\Delta}^*_\rho = \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_f(r)}{r^{\rho})}, \qquad \underline{\Delta}^*_\rho = \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_f(r)}{r^\rho}.$$

Если эти величины совпадают, то говорят, что нули функции f измеримы.

Приведем один из результатов, дающих точное описание взаимного поведения нулей и тейлоровских коэффициентов целой функции.

Теорема. *Пусть для целой функции f выполнены условия $0 < T_\rho < +\infty$ и $\underline{\Delta}^*_\rho > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если функция имеет совершенно регулярный по Валирону рост, то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ \sqrt[n]{|f_n \, \lambda_1\lambda_2 \, \ldots \, \lambda_n|} = \left(\frac{T_\rho}{\underline{\Delta}^*_\rho}\right)^{1/\rho}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \ \sqrt[n]{\hat{f}_n \, |\lambda_1\lambda_2 \, \ldots \, \lambda_n|} = \left(\frac{T_\rho}{\overline{\Delta}^*_\rho}\right)^{1/\rho}.$$

2. *Если последовательность нулей функции измерима, то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ \sqrt[n]{|f_n \, \lambda_1\lambda_2 \, \ldots \, \lambda_n|} = \left(\frac{T_\rho}{\overline{\Delta}^*_\rho}\right)^{1/\rho}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \ \sqrt[n]{\hat{f}_n \, |\lambda_1\lambda_2 \, \ldots \, \lambda_n|} = \left(\frac{t_\rho}{\overline{\Delta}^*_\rho}\right)^{1/\rho}.$$

Здесь $\hat{f}_n$ – регуляризованные по Адамару модули тейлоровских коэффициентов $|f_n|$ функции f.

Б. Г. Вакулов, Ю. Е. Дроботов (Ростов-на-Дону)
bvak1961@bk.ru, yu.e.drobotov@yandex.ru

ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ НА МНОЖЕСТВЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЁННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ГЁЛЬДЕРОВОСТИ С ВЕСАМИ ИЗ КЛАССА БАРИ–СТЕЧКИНА [1]

Пусть Ω – открытое ограниченное множество в пространстве $\mathfrak{X}$ с метрикой $d : \mathfrak{X}^2 \to [0, \infty)$ и мерой μ. Предположим, что пространство $(\mathfrak{X}, d, \mu)$ таково, что все шары $B(x, r) = \{\sigma \in \mathfrak{X} : d(x, \sigma) \le r\}$ измеримы, причём мера μ удовлетворяет условию роста

$$\mu\,[B(x,r)] \le Kr^N \quad \text{при} \quad r \to 0, \quad K > 0, \tag{1}$$

где $N > 0$ – не обязательно целое число.

В рамках представленного исследования рассмотрены гиперсингулярные интегралы вида

$$D^{\alpha(\cdot)} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\substack{\sigma\in\Omega: \\ d(x,\sigma)>\varepsilon}} \frac{f(\sigma) - f(x)}{d^{N+\alpha(x)}(x,\sigma)} d\mu(\sigma), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

где $0 \le \Re[\alpha(x)] < 1$ и $\Pi_\alpha := \{x \in \Omega : \mathfrak{Re}[\alpha(x)] = 0\}$ есть множество меры нуль. Доказаны условия ограниченности оператора (2) в пространствах $H^{\omega(\cdot)}(\Omega, w)$, определяемых условием на локальный модуль непрерывности произведении функций wf:

$$\omega(w\,f, x, \delta) := \sup_{\substack{\sigma\in\Omega: \\ d(x,y)\le\delta}} |(w\,f)(x) - (w\,f)(\sigma)| \le A\omega(x,\delta), \qquad A, \delta > 0.$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ТУБИТАК в рамках научного проекта № 20-51-46003.

При этом в качестве весовой функции $w(x)$ рассматриваются элементы класса Бари–Стечкина, осциллирующие между двумя степенными функциями.

В случае классических пространств Гёльдера с постоянной характеристикой $\omega(x, \delta) \equiv \lambda$, $0 < \lambda < 1$, построенных в условии роста (1), оператор (2) с постоянным α рассматривался, например, в [1], а для переменного $\alpha(x)$ в безвесовом случае и для веса $\mathfrak{Re}[\alpha(x)]$ – в работе [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Garcia-Cuerva J., Gatto A. E.* Boundedness properties if fractional integral operators associated to non-doubling measures // Studia Math. 2004. Vol. 162. Pp. 245–261.

2. *Samko N. G., Samko S. G., Vakulov B. G.* Fractional integrals and hypersingular integrals in variable order Hölder spaces on homogeneous spaces // J. Function Spaces Appl. 2010. Vol. 8, № 3. Pp. 215–244.

А. В. Гиль (Ростов-на-Дону)
gil-alexey@yandex.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ОДНОРОДНЫМ СТЕПЕНИ -1 ЯДРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ BMO^K

В работе рассматриваются операторы с однородными степени - 1 ядрами в пространстве BMO^k, $k \in Z_+$- функций с ограниченной средней осцилляцией k-того порядка. Такие операторы имеют многочисленные приложения и хорошо изучены в пространствах суммируемых или гладких функций. В одномерной теории в пространствах $L_p, 1 < p < \infty$, эти классы операторов тесно связаны с операторами свертки (с помощью экспоненциальных замен), а также с сингулярными интегральными операторами (с помощью преобразования Меллина для операторов с однородными степени -1 ядрами). Эти связи приводят к соответствию **оператор $\Longleftrightarrow$ядро$\Longleftrightarrow$символ**, что позволяет формулировать в терминах символа и его индекса основные свойства операторов, связанные с описанием их спектральных и фредгольмовских свойств. Пространства ВМО уже давно возникли в различных вопросах, связанных с интегральными операторами. Именно в их терминах, например, описывается образ дробных интегралов и потенциалов Рисса в так называемом предельном случае теоремы Соболева, когда $\alpha = np$. В терминах принадлежности к ВМО описываются классы функций, для которых коммутатор с сингулярным интегральным оператором оказывается компактен и др. Пространства ВМО высших порядков оказываются тесно связанными с пространствами типа Бесова.

Основным объектом, рассматриваемым в работе, является интегральный оператор с однородным степени -1 ядром

$$Kf(x) = \int_a^b h(t)k(x, y)f(y)dy, \qquad x \in (a, b),$$

где $h(t)$ - непрерывная функция. Для последнего оператора интересны случаи, когда сингулярная точка $x = 0$ лежит на границе (то есть, случаи отрезка [0,1] или полуоси). В работе приводятся достаточные условия ограниченности интегральных операторов K с однородными степени -1 ядрами в пространствах функций с ограниченной средней осцилляцией порядка k на полуоси, на отрезке, и изучаются его спектральные свойства. Интересно отметить, что при переходе к пространству BMO^k, условия ограниченности зависят от порядка k, а условия фредгольмовости для случая отрезка $[0, 1]$ те же, что и при $k = 0$, в то время как, казалось бы, для более простого оператора по полуоси они оказываются зависящими от порядка k.

Н. А. Ильина (Ростов-на-Дону)
nadfomenko@sfedu.ru

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ И ПОКООРДИНАТНО ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрим оператор

$$(A\varphi)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k(x,y,u,v)\varphi(u,v)\,du\,dv, \qquad (1)$$

где функция $k(x, y, u, v)$ определена на $\mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{n+m}$ и удовлетворяет следующим условиям: однородность степени $(-n)$ по переменным x, u; покоординатная однородность векторной степени $(\mathbf{-1})$ по переменным y, v; инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$ по переменным x, u. Кроме того, на функцию $k(x, y, u, v)$ накладывается специальное условие суммируемости, обеспечивающее ограниченность этого оператора в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$.

Определим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ проектор P формулой

$$(P\varphi)(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y), & |x| \leqslant 1,\ y \in \mathbb{R}^m, \\ 0, & |x| > 1,\ y \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

и обозначим через Q дополнительный проектор. Рассмотрим парный оператор

$$B = \lambda I + A_1 P + A_2 Q,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, A_1, A_2 — операторы вида (1).

Для оператора B определен матричный символ, невырожденность которого является необходимым и достаточным условием нетеровости этого оператора. Показано, что в случае нетеровости оператора B, его индекс равен нулю.

В качестве частного случая получены необходимые и достаточные условия нетеровости и обратимости оператора $\lambda I - A$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators // Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin, 2001. 427 p.

Г. А. Каменских (Ростов-на-Дону)
kamenskih@sfedu.ru

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{|y|\leqslant|x|} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \tag{1}$$

предполагая, что функция $k(x,y)$ заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, однородна степени $(-n)$, инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет специальному условию суммируемости.

Рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор

$$A = \lambda I + M_a K + T, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathrm{C}(\mathbb{B}_n)$, K — оператор вида (1), T — компактный в $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ банахову алгебру, порожденную всеми операторами вида (2). Для этой алгебры строится символическое исчисление, т. е. каждому оператору $B \in \mathfrak{A}$ ставится в соответствии его символ — некоторая функция $\sigma_B(m,\xi) \in C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})$. Здесь через $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ обозначена компактификация локально компактного пространства $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой.

Теорема 1. *Пусть $B \in \mathfrak{A}$. Для того, чтобы оператор B был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sigma_B(m,\xi) \neq 0, \quad \forall (m,\xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}.$$

Если это условие выполнено, то

$$\operatorname{ind} B = -\sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi \sigma_B(m,\xi),$$

где $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Авсянкин О. Г.* Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами // Матем. заметки. 2003. Т. 73, вып. 4. С. 483–493.

2. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators. Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin, 2001. 427 p.

В. О. Коваленко (Ростов-на-Дону)
varkovalenko@sfedu.ru

АСИМПТОТИКА ОРБИТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

При исследовании динамических свойств оператора дифференцирования D в весовых пространствах голоморфных функций необходимо знать асимптотическое поведение последовательности норм $\|D^n\|$. К настоящему времени достаточно точные результаты получены лишь для весов конкретного типа (см. [1], [2]). В настоящей работе установлены результаты для весов общего вида, удовлетворяющим следующим дополнительным условиям.

Пусть для веса $v(r) = e^{\varphi(r)}$ выполняются условия:

a) $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – вогнута и возрастает на $[0, \infty)$,

b) $\psi(x) = \phi(e^x)$ – выпукла на $\mathbb{R}$,

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть вес $v(r)$ имеет вид $v(r) = e^{\phi(r)}$, где $\phi(r)$ удовлетворяет условиям a) и b). Тогда оператор дифференцирования D действует непрерывно из $H_v(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$ и*

$$\|D^n\| = n! e^{-\psi^*(n)},$$

где $\psi^*(y) = \sup\limits_{x \geq 0}(xy - \psi(x))$ – сопряженная по Юнгу-Фенхелю-Лежандру с $\psi(x)$ функция.

В качестве следствий из Теоремы 1 следуют соответствующие результаты из работы [1]. Более того, найдены новые типы весов, для которых удается установить точную асимптотику $\|D^n\|$ при $n \to \infty$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Atzman A., Brive B.* Surjectivity and invariant subspaces of differential operators on weighted Bergman spaces of entire functions. Contemp. Math. Soc. 2006.—Vol. 404. —pp. 27–39.

2. *Beltran M. J., Bonet J., Fernandez C.* Classical operators on Banach weighted spaces of entire functions. Proc. Amer. Math. Soc. 2013.—Vol. 141, Issue 12 —pp. 4293–4303.

В. Г Кротов (Минск, Беларусь)
krotov@bsu.by

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ХАРДИ

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и σ-конечной борелевской мерой μ, $\mathcal{X} = X \times (0, T)$, $0 < T \le \infty$, (Y, ν) — множество с σ-конечной мерой ν.

Для каждой функции $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ определим «некасательную» максимальную функцию

$$Nu(x) := \sup\{|u(y,t)| : d(x,y) < t\}, \quad x \in X,$$

и введем классы $\mathcal{H}^0(\mathcal{X})$ и $L^0(Y)$ измеримых функций на $\mathcal{X}$ и Y соответственно и класс $\mathcal{H}^p(\mathcal{X})$, $p > 0$, состоящий из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathcal{X})$, для которых $Nu \in L^p(X)$.

Пусть $A : \mathcal{H}^0(\mathcal{X}) \to L^0(Y)$ — оператор, удовлетворяющий следующему условию (субаддитивность с константой): существует такое число $c > 0$, что

$$A(u+v)(y) \le c[Au(y) + Av(y)], \quad y \in Y,\ u, v \in \mathcal{H}^0(\mathcal{X}).$$

Теорема 1. *Пусть $0 < p_0 < p_1 < \infty$ и оператор A для $i = 0, 1$ удовлетворяет условиям*

$$\nu\{Au > \lambda\} \le c_i \left(\frac{1}{\lambda}\|Nu\|_{L^{p_i}(X)}\right)^{p_i}, \quad \lambda > 0,\ u \in \mathcal{H}^0(\mathcal{X}).$$

Тогда для любого $p_0 < p < p_1$ существует такая постоянная c_p, что для всех $u \in \mathcal{H}^p(\mathcal{X})$ выполнено неравенство

$$\|Au\|_{L^p(Y)} \le c_p \|Nu\|_{L^p(X)}, \quad u \in \mathcal{H}^p(\mathcal{X}).$$

Утверждение теоремы 1 аналогично «диагональному» случаю интерполяционной теоремы Марцинкевича, отличаясь от последнего областью определения функций из исходных пространств и наличием некасательной максимальной функции в правых частях неравенств. Справедлив также «недиагональный» вариант теоремы 1. Область применения теоремы 1 — классы Харди и краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений в частных производных.

О. С. Кудрявцева (Волгоград, ВолгГТУ),
А. П. Солодов (Москва, МГУ)
kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

ОБЛАСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ[1]

В геометрической теории функций доминирующей темой исследований на протяжении многих десятилетий являлась задача нахождения точных оценок коэффициентов для голоморфной однолистной в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ функции $f(z) = z + c_2z^2 + \ldots$. Бибербах в 1916 году высказал предположение, что $|c_n| \leqslant n$. Попытки доказать или опровергнуть гипотезу Бибербаха привели к появлению целого ряда специальных методов исследования однолистных функций. Полное решение гипотезы Бибербаха было получено Луи де Бранжем в 1984 году и опиралось на параметрический метод Лёвнера, ставший мощным инструментом современной теории функций.

В духе гипотезы Бибербаха мы формулируем предположение о точных областях коэффициентов голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D}$ в себя с неподвижными точками. Как показывают недавние результаты исследование именно таких отображений с точки зрения решения различных экстремальных задач является наиболее продуктивным.

Пусть $\mathscr{B}$ — класс голоморфных отображений круга $\mathbb{D}$ в себя и $\mathscr{B}_2[0,1] = \big\{f \in \mathscr{B}\colon f(0) = 0, \angle\lim\limits_{z\to 1} f(z) = 1, \angle\lim\limits_{z\to 1} f'(z) = f'(1) \leqslant 2\big\}$.

Гипотеза. *Пусть $f(z) = c_1z + c_2z^2 + \ldots$ из класса $\mathscr{B}_2[0,1]$. Тогда*

$$\frac{|1-c_n|^2}{1-|c_n|^2} \leqslant n. \qquad (1)$$

При этом найдутся функции из класса $\mathscr{B}_2[0,1]$ такие, что в (1) достигается равенство.

Неравенство (1) при $n = 1$ разными методами получено в [1], [2]. Нами разработан метод доказательства неравенства (1) при $n = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cowen C. C., Pommerenke Ch.* Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk // J. London Math. Soc. 1982. V. 26, № 2. P. 271–289.

2. *Горяйнов В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00584).

А. А. Литвинов (Ростов-на-Дону)
litvinov16.12.1998@mail.ru

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ С ТОПОЛОГИЯМИ, ЗАДАВАЕМЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ КВАЗИПРЕДНОРМ

В работах Ю. Ф. Коробейника и его последователей была развита теория абсолютно представляющих систем в локально выпуклых пространствах (см. [1]). В докладе будут представлены аналоги начал этой теории для пространств с топологиями, задаваемыми семействами квазипреднорм, которые необязательно локально выпуклые.

Напомним, что для квазипреднормы p вместо неравенства треугольника требуется, чтобы $p(x+y) \leqslant K(p(x)+p(y))$, при некотором $K \geqslant 1$. Положим $s = (log_2(2K))^{-1}$ и назовем ее s-квазипреднормой.

Пусть $(E, \tau_{\mathcal{P}})$ – линейное топологическое пространство с топологией, заданной направленным семейством квазипреднорм $\mathcal{P}$, $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ – фиксированная последовательность ненулевых элементов E.

X называется абсолютно представляющей системой (АПС) в E, если каждый элемент $x \in E$ можно представить в виде суммы ряда $x = \sum c_k x_k$, сходящегося в E и $\sum |c_k|^s p^s(x_k) < \infty$, где $s = s(p)$ определено выше.

Введено коэффициентное пространство, установлены его топологические свойства, изучен вопрос о существовании АПС в таких пространствах. В том числе доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *В любом отделимом сепарабельном линейном топологическом пространстве, в котором топология задается счетным набором квазипреднорм, имеется АПС.*

Теорема 2. *Пусть E – полное топологическое пространство с топологией, задаваемой набором $\mathcal{P}$ s-квазипреднорм. $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ – АПС в E тогда и только тогда, когда существует пространство F с топологией, задаваемой набором $\mathcal{Q}$ s-квазипреднорм с АПС $Y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ и эпиморфизм $L : F \to E$ такой, что $Ly_k = x_k, k = 1, 2...$*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, № 1(217). С. 73–123.

В. Р. Мисюк (Гродно, Беларусь)
misiuk@grsu.by

ОДНО СООТНОШЕНИЕ КВАЗИНОРМ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть T, D_+ и D_- соответственно окружность $|z| = 1$, круг $|z| < 1$ и область $|z| > 1$ в комплексной плоскости. Для $0 < p \leqslant \infty$ через $L_p(D_+)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций на D_+ относительно плоской меры Лебега с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(D_+)}$. Хорошо известно следующее соотношение $\|r'\|_{L_2(D_+)} \leqslant \sqrt{\pi n}\|r\|_{L_\infty(D_+)}$, полученное Е.П. Долженко. В настоящее время рядом авторов приведены его различные виды. В частности, были получены обобщения для пространств Лебега $L_p(D_+)$ относительно плоской меры, на высшие производные и на производные дробного порядка, приведены соответствующие обратные теоремы [3],[4]. Здесь описывается ещё один аналог этого неравенства, дополняющий ранее известные результаты. Через B_q^α обозначим пространство Харди–Бесова (см., например, [1],[2]). Полагаем, что рациональная функция r степени $n + m$ не имеет полюсов на T, причем n полюсов лежат в D_+ и m — в D_-. Тогда $r(z) = r_+(z)+r_-(1/z)$, где r_+ и r_- — рациональные функции степени соответственно n и m с полюсами лишь в D_-.

Теорема. Если $\alpha > 0$, $p > 2$ и $1/q = \alpha+2/p$, то $\|r_+\|_{B_q^\alpha} \leqslant c(\alpha, p)n^{\alpha+1/p}\|r\|_{L_p(D_+)}$, $\|r_-\|_{B_q^\alpha} \leqslant c(\alpha, p)m^{\alpha+1/p}\|r\|_{L_p(D_+)}$, где $c > 0$ и зависит лишь от p.

Литература

1. *Flett T. M.* Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk *J. Math. Anal. and Appl.* V.39 (1972), 121–158.

2. *Пекарский А. А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации *Мат.сборник.* Т. 124 (1984), 571–588.

3. *Мисюк В. Р.* Уточнение неравенств и теорем типа Бернштейна теории рациональных приближений относительно плоской меры Лебега *Веснік ГрДУ імя Я. Купалы.* Сер. 2. Фіз. Мат. Інфарм. No.2 (2008), 22–31.

4. *Мисюк В. Р.* Об обратной теореме теории рациональных приближений для пространств Бергмана. *Проблемы физики, математики и техники.* No.1(2) (2010),34–37.

А. П. Старовойтов (Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by

ПОЛИОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ В ПРЕДГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ [1]

Полиортогонализация первого и второго типов линейно независимой системы функций $\{1, x, ..., x^2, ...\}$ приводит к понятиям полиортогональных многочленов первого и второго типов [1]. В данном сообщении изучается возможность построения полиортогональных систем функций с помощью процесса полиортогонализации произвольной конечной подсистемы линейно независимой системы функций $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$ в предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1, ..., \mu_k$.

Основным результатом является теорема, которая обобщает теорему Грама – Шмидта об ортогонализации. В ней описываются процессы полиортогонализации первого и второго типов системы функций φ и в случае единственности (с точностью до числового множителя) устанавливается явный вид полиортогональных функций первого и второго типов, полученных в результате указанной полиортогонализации. Классическая формула Грама – Шмидта для представления ортогонального многочлена (см., например, [2]) и формулы для представления полиортогональных многочленов первого и второго типов, полученные в [3] и [4], вытекают из доказанной теоремы в качестве частных случаев.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.

2. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.- Л.: ГИТТЛ, 1949.

3. *Старовойтов А. П., Рябченко Н.В.* О явном виде полиортогональных многочленов // Известия вузов. Математика. 2021. № 4. С. 80–89.

4. *Старовойтов А. П., Рябченко Н.В.* Аналоги формулы Шмидта для полиортогональных многочленов первого типа // Матем. заметки. 2021. Т. 110, № 3 2021. № 4. С. 424–433.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

S. M. Umarkhadzhiev (Grozny)
umsalaudin@gmail.com

LOCAL GRAND LEBESGUE SPACES

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set, $x_0 \in \overline{\Omega}$, $|x_0| < \infty$ and $d = \operatorname{diam} \Omega$, $0 < d \leq \infty$. By $G(0,d)$ we denote the set of functions continuous and bounded on $[0,d)$, satisfying the conditions:

$$a(0) = 0 \text{ and } \inf_{\delta \leq t < d} a(t) > 0 \text{ for every } \delta \in (0,d).$$

Definition. Let $a \in G(0,d)$. We define the local grand Lebesgue space $L^{p),\theta}_{x_0,a}(\Omega)$, where $0 < p < \infty$, $\theta > 0$, by the (quasi)-norm

$$\|f\|_{L^{p),\theta}_{x_0,a}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<\ell} \varepsilon^\theta \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p a(|x-x_0|)^{p\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

where $\ell \in (0,\infty)$ is any fixed number.

Theorem 1. Let $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ and $a \in G(\mathbb{R}_+)$. If there exists an $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$a^{\varepsilon_0} \in A_p,$$

then the maximal operator

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

is bounded in the space $L^{p),\theta}_{x_0,a}(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 2. Let $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. If there exists an $\varepsilon_0 > 0$ such that $a^{\varepsilon_0} \in A_{1+\frac{q}{p'}}$, then the Riesz potential operator

$$I^\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy, \; 0 < \alpha < n,$$

is bounded from $L^{p),\theta}_{x_0,a}(\mathbb{R}^n)$ to $L^{q),\theta}_{x_0,a}(\mathbb{R}^n)$.

Секция III
Дискретная математика, алгебра, геометрия

С. М. Гусейн-Заде (Москва)
sabir@mccme.ru

Зеркально симметричные пары по Берглунду–Хюбшу–Хеннингсону и их некоммутативные аналоги [1]

Двойственность Берглунда–Хюбша–Хеннингсона — первая систематическая попытка конструирования зеркально-симметричных моделей Ландау–Гинзбурга. Входными данными для (орбифолдной) модели Ландау–Гинзбурга является пара (f, G), состоящая из квазиоднородного многочлена f от нескольких переменных и конечной группы сохраняющих его линейных преобразований. В конструкции Берглунда–Хюбша–Хеннингсона в качестве f участвуют, так называемые, обратимые многочлены, а в качестве G подгруппы групп их диагональных симметрий. (Квазиоднородный многочлен f называется *обратимым*, если количество мономов в нем равно количеству n переменных, т.е. $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{E_{ij}}$, $a_i \neq 0$ и $\det(E_{ij}) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать что $a_i = 1$.) По паре (f, G) описааного вида строится двойственная пара $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$. (При этом $\widetilde{f}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{E_{ji}}$.) Двойственные пары (f, G) и $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$ обладают рядом «зеркально симметричных» свойств (например, симметрией ряда орбифолдных инвариантов, простейшим из которых является орбифолдная эйлерова характеристика).

Двойственность Берглунда–Хюбша–Хеннингсона была обобщена на пары вида $(f, \widehat{G})$, где f — обратимый многочлен, а $\widehat{G}$ — полупрямое произведение $G \rtimes S$ группы G диагональных симметрий многочлена f и группы S перестановок координат, сохраняющих f и G. Конструкция основана на идее А.Такахаши и поэтому называется двойственностью Берглунда–Хюбша–Хеннингсона–Такахаши. Оказывается, что двойственные пары могут претендовать на зеркальную симметричность только при выполнении специальных ограничений на группу S перестановок координат: так называемое условие четности. Для удовлетворяющих условию четности двойственных пар в некоторых случаях была доказана симметричность таких инвариантов, как орбифолдная эйлерова характеристика, орбифолдная дзета-функция монодромии, орбифолдная E-функция.

Доклад основан на совместных результатах с В. Эбелингом.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 21-11-00080).

В. В. Казак, Н. Н. Солохин (Ростов-на-Дону)
vkazak136@gmail.com, nik2007.72@mail.ru

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КВАЗИКОРРЕКТНОСТИ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

В настоящей работе изучаются достаточные условия квазикорректности краевого условия смешанного типа в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с краем. В работах И.Н. Векуа, основное содержание которых изложено в [1], разработан аналитический аппарат, позволивший решить ряд геометрических задач для поверхностей положительной кривизны [2], [3], а также для поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения [4].

В настоящей работе изучается кинематическая внешняя связь вида

$$\alpha(\overline{U},\bar{\ell})+\beta(\overline{V},\bar{L})=\sigma \quad \text{на} \quad \partial S, \tag{3}$$

где $\overline{U}=\overline{U}(x,y)\in C^{3,\mu}$, $\overline{V}=\overline{V}(x;y)$ — векторы смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, векторные поля $\bar{\ell}$, $\bar{L}$ и функции α, β, σ принадлежат классу C^{μ}, $0<\mu<1$, а также изучение её характера и поведения поверхности в отношении бесконечно малых изгибаний при этой связи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Векуа И. Н.* Обобщённые аналитические функции. М.: Наука. 1988.

2. *Фоменко В. Т.* О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний // СМЖ. -1974. Т. XV, № 1. С. 152–161.

3. *Сабитов И. Х.* Бесконечно малые изгибания выпуклых поверхностей с краевым условием обобщённого скольжения // ДАН СССР. 1962. 147, № 4.С. 793-796.

4. *Усманов З. Д.* К вопросу о деформации поверхности с точкой уплощения. // Матем. сб. 89 (131), 1 (9). С. 61-82.

П. Н. Сорокин (Москва)
s_p_n_1974@bk.ru

ЗАДАЧА ПЛОТНЕЙШЕЙ УПАКОВКИ ШАРОВ ДВУХ ВИДОВ В БОЛЬШОЙ КУБ [1]

Рассмотрим задачу плотнейшей упаковки шаров в большой куб в n-мерном пространстве ($n \geq 3$). Методом, разработанным Блихфельдтом в его работе [1], можно решить задачу об упаковке одинаковых шаров в большой куб:

[1]Публикация выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления» (FNEF-2022-0007).

Теорема 1. В n-мерном пространстве ($n \geq 3$) в большой куб со стороной E упакованы шары радиуса 1. Тогда для объема T, занимаемого шарами выполнено неравенство:

$$\overline{\lim_{E \to \infty}} \frac{T}{E^n} \leq \frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}} .$$

Тем же методом [1], [2] можно решить задачу плотнейшей упаковки в куб шаров двух видов:

Теорема 2. В n-мерном пространстве ($n \geq 3$) в большой куб со стороной E упакованы k_1 шаров, радиуса α, и k_2 шаров, радиуса β ($\alpha \geq \beta$). Пусть $E \to \infty$, $k_1 \to \infty$, $k_2 \to \infty$. Обозначим отношение $\frac{k_1}{k_2} = \rho$, которое остается постоянным.

Тогда для объема T, занимаемого шарами двух видов, выполнено неравенство:

$$\overline{\lim_{E \to \infty}} \frac{T}{E^n} \leq \frac{n+2}{\rho\left(1 - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4\beta^2}\right)^{\frac{n+2}{2}} + \left(\frac{2\alpha^2}{\beta^2} - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4\beta^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}} \cdot \left(\rho + \frac{\alpha^n}{\beta^n}\right) .$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Blichfeldt H. F.* The minimum value of quadratic forms and the closest packing of spheres // Math. Annalen, 1929, Bd. 101, pp. 605–608.

2. *Малышев А. В.* Основные понятия и теоремы геометрии чисел // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, Вып. 3, с. 43–73.

Секция V
Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии

В. А. Батищев (Ростов-на-Дону)
batishev-v@mail.ru

БИФУРКАЦИИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СТЕПЕННОМ ОХЛАЖДЕНИИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Рассматривается задача о стационарном термокапиллярном течении несжимаемой жидкости в области пограничного слоя вблизи свободной границы. Предполагается что граница неравномерно локально охлаждается по степенному закону от радиальной координаты. Рассчитаны как осесимметричные режимы течений жидкости, так и не симметричные. Показано, что при превышении скоростью внешнего потока жидкости своего предельного значения возникает бифуркация вращения. В осесимметричном случае от основного режима ответвляется только два закрученных режима. При отсутствии осевой симметрии возможно возникновение бесконечного числа вторичных вращательных режимов.

Течение жидкости изучается на основе системы уравнений Навье-Стокса и уравнения переноса тепла. Предполагается, что диффузионные коэффициенты вязкости и теплопроводности малы, что приводит к формированию пограничного слоя вблизи свободной границы. Жидкость заполняет полубесконечное пространство, ограниченное сверху недеформируемой свободной границей. Вне пограничного слоя течение жидкости описывается уравнениями Эйлера в главном приближении. Считается, что невязкое течение не закручено.

В окрестности точки бифуркации построена асимптотика вторичных вращательных режимов по степеням малой амплитуды азимутальной компоненты скорости на свободной границе. Вторичные режимы представляют собой стоячие азимутальные волны, зависящие от двух произвольных параметров, которые не определяются постановкой задачи и внешними условиями. Эти волны возникают только при квадратичной зависимости температуры от радиальной координаты. Для вращательных режимов построено точное решение нелинейных уравнений, описывающее бесконечное число азимутальных волн.

Н. В. Боев (Москва)
nvboev@sfedu.ru

Реконструкция формы невыпуклых препятствий в двумерной акустической среде методами дифференциальной геометрии с применением кругового сканирования короткими волнами

Явный вид главного члена асимптотики амплитуды давления выписан в случае обратного рассеяния акустической волны в приближении дальнего поля. Прикладное значение этого результата состоит в том, что при обнаружении и реконструкции формы препятствий в акустических средах используется озвучивание высокочастотными акустическими волнами в эхо–режиме. Такой вид сканирования позволяет получить в любом направлении время прохождения отраженного эхо–сигнала и его амплитуду. Такие данные составляют основу метода реконструкции препятствий сложной невыпуклой формы.

Методами геометрической теории дифракции в приближении дальнего поля получены явные выражения давления в обратно отраженных волнах от поверхностей 2D препятствий.

Рассматривается реконструкция односвязных 2D областей с негладким граничным контуром положительной кривизны, имеющим конечное число угловых точек, угол раствора которых больше прямого.

Алгоритм реконструкции препятствия состоит в следующем. Будем считать, что при круговом облучении границы в эхо–режиме известными являются время прихода отраженного импульса и вещественная амплитуда отраженной волны. Знание времени прихода полностью определяет выпуклую оболочку границы объекта, которая является огибающей найденного семейства касательных. Декартовы координаты точек дуги выписываются на основе известных соотношений дифференциальной геометрии. Для определения дуг внутренней части контура привлекается комплексная амплитуда отраженной волны. Для восстановления каждой из этих дуг используется натуральное уравнение кривой, на основе которого отфильтровывается низкочастотная составляющая амплитуды и по ней определяются декартовы координаты точек дуги.

Проведенные численные эксперименты показали, что этот естественный путь фильтрации обеспечивает более точную реконструкцию по сравнению со многими другими известными методами. Развитый в работе алгоритм был апробирован для реконструкции областей, как принадлежащих рассматриваемому классу (реконструкция препятствия в виде пары пересекающихся кругов), так и не принадлежащих этому классу (реконструкция препятствия в виде пары касающихся кругов и в виде трехлепестковой розы), Точность реконструкции увеличивается с ростом частоты.

Н. В. Зеликин (Москва)
n-zl@math.msu.su

КАТЕГОРНЫЙ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Единство социально-экономического пространства взаимосвязанных сущностей и явлений установлено уже в работах классиков политэкономии, и проработано во множестве деталей. Вместе с тем эта тема не может быть окончательно исчерпана и появляются работы, открывающие целые направления, как например социоэкономика, дополняющая экономическую социологию и социономика, которая ставит перед собой задачу объединения всех гуманитарных наук для рещения социальных задач. В этой связи полезным концептуальным и во многих случаях инструментальным средством анализа является математическая теория категорий. Первоначально утвердившись в качестве мощного математического аппарата, теория категорий стала успешно применяться исследователями во многих направлениях прикладных наук, таких как биология, лингвистика, теоретическая физика, экономика и социология, информатика и других. В области социально-экономических исследований, в отличие от подходов, концентрирующих внимание на поведении индивидов, категорный анализ системно выстраивает межличностные, межгрупповые и индевидуально-групповые отношения. В структурированной социально-экономической категории можно определить все социальные объекты, начиная с индивида, через всевозможные социальные группы по тем или иным признакам (расы, нации, веры, партии, формальные и неформальные объединения), до произвольного масштаба глобальных объединений. Каждый социальный объект характеризуется социальной позицией, которая формируется в неразрывном единстве с экономическими настроениями и предпочтениями всех входящих в категорию суб-объектов. Такой подход позволяет, например, выстроить всю цепочку связей и зависимостей цикла экономического воспроизводства, от базовых идеалов и потребностей, через все категорные звенья инвестиционного цикла развития каждого бизнеса с промежуточными циклами товарного производства, возмещающими инвестиционные затраты и создающими предпосылки для развития. Мало того, инструментальные средства категорного анализа предоставляют всё необходимое для разработки архитектур баз данных и набора программных модулей обработки производственно-хозяйственной информации систем управления бизнеса, от отдельных предприятий до объединений любых форм. Важно и то, что категорный подход является методологической основой ряда образовательных программ, предоставляя полный набор понятий и определений, описывающих социально-экономический ландшафт с необходимой детализацией, без утраты единства и целостности объекта исследования. Среди его важнейших достоинств – способность охватить явление в целом, от мельчайших объектов до произвольных объединений – как в экономических, так и социальных областях. Связи и межобъектные отношения универсальны и пластичны, благодаря естественности преобразований между смежными и сопряженными категориями. Важно и то, что строго обоснованные математические конструкции, включая наиболее ценные - универсальные, в полном объёме переносятся на прикладные области. Установленные в исходных категориях причинно-следственные связи сохраняются по всей цепочке трансформаций и могут служить прочной канвой для построения упорядоченной картины непрерывного развития.

V. L. Litvinov, K. V. Litvinova(Moscow)
vladlitvinov@rambler.ru, kristinalitvinova900@rambler.ru

MATHEMATICAL MODELING OF STRING VIBRATIONS WITH A MOVABLE BOUNDARY

The resonance characteristics of viscoelastic string with moving boundaries using the Kantorovich – Galerkin method are examined in the article. The phenomenon of resonance and steady passage through resonance are analyzed.

One-dimensional systems whose boundaries move are widely used in engineering [1–5]. The presence of moving boundaries causes considerable difficulties in describing such systems. Exact methods for solving such problems are limited by the wave equation and relatively simple boundary conditions. Of the approximate methods, the Kantorovich-Galerkin method described in [5] is the most efficient. However, this method can also be used in more complex cases. This method makes it possible to take into account the effect of resistance forces on the system, the viscoelastic pstringrties of an oscillating object, and also the weak non-stationarity of the boundary conditions.

The paper considers the phenomena of steady-state resonance and passage through resonance for transverse oscillations of a string of variable length, taking into account viscoelasticity and damping forces. Performing transformations similar to transformations [5], an expression is obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the n-th dynamic mode. Expressions are also obtained that describe the phenomenon of steady state resonance and the phenomenon of passage through resonance.

The expression that determines the maximum amplitude of oscillations when passing through the resonance was numerically investigated to the maximum. The dependence of the string oscillation amplitude on the boundary velocity, viscoelasticity, and damping forces is analyzed.

In conclusion, we note that the above results make it possible to carry out a quantitative analysis of the steady state resonance and the phenomenon of passage through the resonance for systems whose oscillations are described by the formulated problem.

References

[1] Vesnitsky A.I., Potapov A.I. Transverse vibrations of strings in mine

hoists // Dynamics of systems. Bitter: Bitter. un-t, 1975. Number 7. Pp. 84–89.

[2] Anisimov V.N., Litvinov V.L. Longitudinal vibrations of a viscoelastic string of variable length // Tr. 4th All-Russian. scientific conf. “Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Mathematical modeling and boundary value problems. Samara, 2007. Part 1. Pp. 25–27.

[3] Goroshko OA, Savin G.N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Science. Dumka, 1971. Pp.290.

[4] Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a string moving in the longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19. No. 4. - Pp.161-165.

[5] Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich – Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2018. No2. Pp. 70–77.

В. А. Лукьяненко, Ю. А. Хазова, А. А. Корнута (Симферополь)
art-inf@yandex.ruб, hazova.yuliya@hotmail.com, korn_57@mail.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ АРГУМЕНТОВ

Рассматривается математическая модель, описывающая процессы формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении когерентного светового пучка в нелинейной оптической системе с пространственно распределенной обратной связью. Динамика нелинейной фазовой модуляции $u(r,t)$, которая характеризует набег фазы световой волны в нелинейной среде, описывается уравнением в частных производных параболического типа

$$u_t + u = D\triangle u + K|A(r,z=0,t)|^2, \;\; r=(x,y). \tag{1}$$

Динамика комплексной амплитуды поля $A(r,z,t)$ непосредственно перед слоем нелинейной среды описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &A(r,z=0,t+t_r) = \\ &= (1-R)^{1/2}A_{in}(r) + Re^{i\varphi_0}\exp iL\triangle\{A(r,z=0,t)\exp iu(r,t)\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Процесс дифракционного распространения поля в резонаторе представлен в уравнении (2) оператором распространения $\exp iL\triangle$ и описывается обычным уравнением дифракции в приближении квазиоптики, которое определяется полем непосредственно после слоя нелинейной среды:

$$-2ik_0\frac{\partial A(r,z,t)}{dz} = \triangle A(r,z,t). \tag{3}$$

Здесь $r = (x, y)$ – радиус-вектор в поперечном сечении светового поля; z – продольная координата; t – время; $\triangle$ – лапласиан, описывающий диффузионный процесс в нелинейной среде; D – нормированный коэффициент диффузии; K – коэффициент нелинейности среды; $|A(r, z = 0, t)|^2$ – интенсивность светового поля, попадающего на нелинейную среду; $A(r, z, t)$ – комплексная медленно меняющаяся амплитуда светового поля внутри резонатора. Комплексная амплитуда внутрирезонаторного поля перед слоем нелинейной среды $A(r, z = 0, t)$ складывается из двух частей: комплексной амплитуды входного поля после прохождения зеркала и комплексной амплитуды поля после распространения в резонаторе. R – коэффициент отражения зеркал по интенсивности; $A_{in}(r)$ – комплексная амплитуда входной световой волны; t_r – время распространения поля в резонаторе; φ_0 – постоянный фазовый сдвиг световой волны в резонаторе; L – длина резонатора, нормированная на дифракционную длину, которая определяется диаметром апертуры резонатора или входного пучка.

Исследована соответствующая линеаризованная задача с условиями на узком кольце в классе периодических функций. Найдено представление решений линеаризованной задачи в виде ряда по собственным функциям и в виде интегрального представления. Проанализирована зависимость решения от параметров задачи и определены случаи смены устойчивости решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корнута А. А., Лукьяненко В. А.* Динамика решений одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т. 28, No. 5, pp. 1–21.

2. *Kornuta A. A., Lukianenko V. A.* Stable Structures of Nonlinear Parabolic Equations with Transformation of Spatial Variables. Lobachevskii J Math. 2021. Vol. 42, pp. 911–930.

3. *Лукьяненко В. А., Хазова Ю. А.* Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, No. 4, pp. 85–98.

П. В. Николенко, Л. В. Новикова (Ростов-на-Дону)
lvnovikova@sfedu.ru

О ДОСТИЖЕНИИ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ФОНДОВОРУЖЕННОСТИ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ЗАТРАТАХ

В модели «инвестиции–потребление» рассматривается вопрос о достижении нужного уровня фондовооруженности к фиксированному моменту времени. В предположении нехватки собственных инвестиций для достижения поставленной цели изучен вопрос о минимуме средств и форме финансового потока, в котором они должны поступить дополнительно к собственным инвестициям, чтобы поставленная задача была решена.

Динамика фондовооруженности в модели «инвестиции–потребление» описывается законом (см. [1, стр. 243])

$$\dot{x} = sf(x) - \mu x,$$

где x — фондовооруженность, f — производственная функция, $f(x)$ — произведенная в единицу времени стоимость, приходящаяся на одного работающего, $0 < s < 1$ — доля произведённой стоимости, которая возвращается в производство в виде инвестиций, μ — коэффициент амортизации производственных фондов.

Запишем поставленную задачу как задачу теории управления

$$J(u) = \int\limits_0^T u(t)\,dt \to \min,$$

$$\dot{x} = F(x) + u,$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

$$b_1(x, u) = u - p(x) \le 0, \quad b_2(x, u) = -u \le 0,$$

время T — фиксировано. Исследуем эту задачу с помощью принципа максимума Понтрягина. Условия оптимальности для таких задач сформулированы Болтянским ([3, стр. 400]). Согласно этим условиям, оптимальный процесс (x, u) доставляет максимум по u функции Понтрягина

$$H = \psi_0 u + \psi(F(x) + u):$$

$$\max_{0 \le v \le p(x(t))} H(\psi(t), x(t), v) = H(\psi(t), x(t), u(t)) \tag{4}$$

(для всех, кроме, возможно, конечного числа моментов t). Где $\psi_0 \le 0$ — константа, ψ — непрерывное решение вспомогательного уравнения

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \sum_{i=1}^{2} \rho_i \frac{\partial b_i}{\partial x}:$$

$$\dot{\psi} = -\psi F'(x) - \rho_1 p'(x), \tag{5}$$

где ρ_i — кусочно-непрерывные неотрицательные функции, такие, что

$$\rho_i(t) b_i(x(t), u(t)) \equiv 0, \quad i = 1, 2 \tag{6}$$

и для всех, кроме конечного числа, значений t, выполняется соотношение

$$\frac{\partial}{\partial u}(H(\psi(t), x(t), u(t)) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i(t) b_i(x(t), u(t))\right):$$

$$\psi_0 + \psi = \rho_1 - \rho_2; \quad (7)$$

$$\text{вектор } (\psi_0, \psi(T)) \text{ ненулевой.} \quad (8)$$

Следует рассмотреть два случая: $\psi_0 = 0$, $\psi_0 = -1$.

Минимальная сумма, которая обеспечит достижение фондовооруженностью значения x_1 к моменту T, определяется из формулы (**??**). При этом рост фондовооруженности от значения x' до значения x'' обеспечивают собственные инвестиции, в остальное время, кроме собственных инвестиций, в максимальном темпе используются привлеченные средства.

Список литературы

[1] Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 294 с.

[2] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.

[3] Николенко П. В. Оптимальная форма заемных средств в задаче о наискорейшем выходе на заданный уровень фондовооруженности // Вестник РГЭУ (РИНХ). — 2020. — № 1 (69). — С. 163–167.

Т. Ю. Плюснина, С. С. Хрущев, Н. С. Дегтерева, Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. (Москва)
plusn@yandex.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ИЗМЕНЕНИЙ В АНТЕННЕ ФОТОСИНТЕТИЧЕСКОГО АППАРАТА РАСТЕНИЙ В ОТВЕТ НА СТРЕСС [1]

Действие различных абиотических факторов стресса, таких как минеральное голодание, высокая освещенность, высокая температура и др., вызывает структурные и физиологические изменения в фотосинтетическом аппарате растений и водорослей. В частности, подавляется активность и производительность фотосистемы 2 (ФС2) – одного из основных компонентов фотосинтетической электрон-транспортной цепи. Кинетика ответа ФС2 на действие стрессовых факторов может служить индикатором интенсивности действия стресса.

В работе представлены модели состояний ФС 2, реализуемых в процессе переноса электронов по электронтранспортной цепи, вызываемых действием света. Детальная модель состоит из 24 обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ модели позволил выявить малые параметры при производных в большей части уравнений. Наличие сингуляр-

[1] Работа выполнена при частичной поддержки гранта РНФ 22-11-00009.

ных возмущений в модели позволило применить теорему Тихонова и получить редуцированную модель, включающую только три дифференциальных уравнения. Параметры редуцированной модели представляют собой выражения, которые состоят из исходных параметров детальной модели. Решение редуцированной модели совпадает с решением полной модели в диапазоне времен экспериментальных кривых, отражающих переходы ФС2 при действии света. Было получено аналитическое решение редуцированной модели, которое позволяет проводить экспресс анализ экспериментальных кривых, полученных при действии различных факторов стресса. С помощью моделей были проанализированы изменения в антенне ФС2, вызванные серным и азотным голоданием.

С. С. Хрущев, Т. Ю. Плюснина, Г. Ю. Ризниченко (Москва)
styx@biophys.msu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ БЕЛКОВ – ПЕРЕНОСЧИКОВ ЭЛЕКТРОНА С ПОМОЩЬЮ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Фотосинтетические процессы, связанные с запасанием энергии света в форме химических связей, протекают у высших растениях в хлоропластах, имеющих сложное внутреннее строение. Пространственно-временной масштаб процессов (размеры порядка микрометров и времена от микросекунд до секунд), происходящих в тилакоидах хлоропластов, не позволяет использовать для их моделирования методы молекулярной и броуновской динамики. Моделирование процессов с использованием уравнений в частных производных не позволяет получить необходимую пространственную детализацию, так как ширина люмена тилакоидов сопоставима с размерами подвижных молекул, и форма и характер расположения отдельных трансмембранных комплексов оказывают непосредственное влияние на движение переносчиков электрона. Нами предложен мезомасштабный подход к моделированию процессов электронного транспорта, основанный на методологии клеточных автоматов. В качестве основы для модели разработана аналитическая геометрия граны и окружающих ее стромальных ламелл, воспроизводящая наблюдаемую в эксперименте ультраструктуру, и позволяющая варьировать форму компартментов изменением числовых параметров. Пространство внутри хлоропласта разбивается на ромбододекаэдрические ячейки объемом 2 нм^3, каждой ячейке присваивается идентификатор компартмента: строма, люмен либо тилакоидная мембрана, и производится расстановка неподвижных трансмембранных белковых комплексов, которые занимают часть ячеек, и мобильных переносчиков электрона. Каждая белковая молекула занимает несколько соседних ячеек, ее форма задается по данным рентгеноструктурного анализа или электронной микроскопии. На каждом шаге моделирования рассчитывается

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 20-04-00465).

вероятность перемещения молекулы в соседние ячейки исходя из экспериментально оцененных значений коэффициента диффузии и занятости ячеек другими молекулами. Предложенный подход позволил создать модель граны тилакоида, состоящей из нескольких тысяч трансмембранных белковых комплексов и подвижных белков – переносчиков электрона.

Nicola Hu, Dmitry B. Rokhlin(Rostov-on-Don)
nkhu@sfedu.ru

NEW APPROACHES FOR SOLVING THE FRACTIONAL RICCATI EQUATION

The Heston model is a stochastic differential equation known for describing the dynamics of an asset price S_t and its variance process V_t. Although important, it has been shown [1] that it does not represent accurately historical volatilities, which happen to be rougher than what the Heston model describes. In particular, the volatility in the Heston model is driven by a Brownian motion. In order to fix to this problem, it has been introduced [1] the *rough* (or fractional) Heston model, which is a fractional stochastic differential equation. The volatility in the rough model is driven by a fractional Brownian motion, which allows for rougher trajectories.

In the Heston model we can express the characteristic function of the log-price in terms of the solution of a differential Riccati equation [2]. This structure is kept in the rough Heston model, in which the differential Riccati is substituted with a fractional differential Riccati [3].

The fractional differential Riccati has been solved through the Adams method [4]. However, new approaches have been elaborated, such as in [5], in which the solution is expressed as a fractional power series. Furthermore, in recent times Neural Networks have been deployed in solving differential and fractional differential equations [6]. An attempt is made.

The Bibliography.

1. *Gatheral J., Jaisson T., Rosenbaum M.* Volatility is rough. Quantitative Finance, 18(6):933-949 (2018).

2. *Heston L. S.* A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options., Review of Financial Studies. p 327-343, (1993).

3. *El Euch O., Rosenbaum M.* The characteristic function of rough Heston models.. Mathematical Finance, 29(1):3вЂ“38, M. (2019).

4. *Diethelm N., Ford J., and Freed A.* Detailed error analysis for a fractional Adams method. Numerical Algorithms, 36(1):31-52. (2004).

5. *Callegaro G., Grasselli M., Pages G.* Fast Hybrid Schemes for Fractional Riccati Equations (Rough is not so Tough), Mathematics of Operations Research, Vol. 46, 221-254, (2021).

6. *Lagaris I. E., Likas A., Fotiadis D. I.* Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations. IEEE Transactions On Neural Networks, vol. 9, nr. 5, p. 989-1000, September (1998).

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону, Россия)
tsvilmm@mail.ru
А. О. Кусая (Ростов-на-Дону, Россия)
ariana_1813@mail.ru

Гравитационное моделирование взаимных торговых потоков стран ЕАЭС

Для интеграционного объединения объёмы, товарная и страновая структура взаимной торговли, темпы её изменений по сравнению с внерегиональной торговлей, характеризуют степень, прочность и заинтересованность стран–участниц в интеграции.

В данной работе анализ взаимной торговли между странами ЕАЭС проводится на основе статистических данных, представленных на официальном сайте «UN Comtrade Database» за период 2009–2019 гг. [1]. Для более подробной оценки факторов, оказывающих влияние на экспортные и импортные потоки внутри ЕАЭС, за основу берется гравитационная модель Х. Линнемана [2]:

$$X_{ij} = B_0 Y_i^{B_1} Y_j^{B_2} N_i^{B_3} N_j^{B_4} D_{ij}^{B_5} A_{ij}^{B_6} P_{ij}^{B_7} + \varepsilon. \qquad (1)$$

В качестве (зависимой) переменной Y был взят экспортный или импортный торговый поток из отдельно взятой страны–члена ЕАЭС в государства–члены ЕАЭС в млрд. долл., объясняющими (независимыми) переменными выступили: X_1 — ВВП (номинальный) отдельно взятой страны-члена ЕАЭС (млрд. долл.); X_2 — ВВП (номинальный) страны–партнера ЕАЭС (млрд. долл.); X_3 — численность населения отдельно взятой страны–члена ЕАЭС; X_4 — численность населения страны–партнера ЕАЭС; X_5 — индекс потребительских цен отдельно взятой страны–члена ЕАЭС (%); X_6 — индекс потребительских цен страны-партнера ЕАЭС (%); X_7 — расстояние (км); X_8 — наличие таможенных барьеров.

Используя указанные переменные, имеем следующую модель [2]:

$$Y(t) = a_0 \prod_{i=1}^{8} (X_i(t))^{\alpha_i}. \qquad (2)$$

Путем логарифмирования мультипликативная форма модели (2) была преобразована в аддитивную, более удобную для целей исследования [2]:

$$\ln Y = a + \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \ln X_i, \quad a = \ln a_0. \qquad (3)$$

Для осуществления гравитационного моделирования взаимных торговых потоков использовался Пакета анализа приложения MS Excel, а именно программа «Регрессия». По результатам многочисленных попыток использования аппарата фиктивных переменных авторами были построены модели торговых потоков стран–участниц ЕАЭС. Высокие значения коэффициента детерминации и отсутствие гетероскедастичности, доказывают достоверность и значимость выявленных факторов и позволяют строить прогнозы взаимной торговли.

Литература

1. Официальная база данных UN Comtrade Database. [Электронный ресурс]. URL: https://comtrade.un.org/data/.

2. *Шумилов А. В.* Оценивание гравитационных моделей международной торговли: обзор основных подходов // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2017. № 2. С. 224–250.

Секция VIII
Цифровая экономика: тенденции развития

А. Д. Мурзин, С. М. Мурзина (Ростов-на-Дону)
admurzin@sfedu.ru

ФОРМИРОВАНИЕ ИННОВАЦИОННЫХ ЭКОСИСТЕМ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ НА РЕГИОНАЛЬНОМ УРОВНЕ

Глобальные изменения мировой социально-экономической системы, вызванные пандемией и последовавшим кризисом, глубочайшим образом проявились в сфере инновационных экосистем. Дополнительным толчком к развитию инноваций в России послужили политические санкции ряда западных стран. В последние два-три года произошел существенный рост конкуренции в сфере формирования экосистем за информационные, интеллектуальные, инновационные и временные ресурсы во всех отраслях хозяйствования.

Мы разделяем понимание экосистем как сложных самоорганизующихся открытых систем, функционально связующих субъекты бизнеса, власти, науки и образования в целях создания инновационных продуктов и услуг, формирования условий для их распространения. Ключевым элементов концепции экосистем выступает синергетический эффект. Архитектоника экосистемы строится вокруг ведущей организации, выполняющей функции связующего звена для объединения участников, регулирования и координации действий, синхронизации целей и стратегий.

Наиболее наглядно, по нашему мнению, синергизм экосистем проявляется на региональном уровне, имея в координатах взаимосвязей линейных субъектов бизнеса, власти и общества, а также надсистемы высшего порядка в виде федеральных властей и подчиненные подсистемы в виде муниципалитетов.

Традиционно выделяемые факторы эффективного инновационного развития: инновационный, стратегический, инфраструктурный и человеческий, по нашему мнению, для функционирования экосистем стоит дополнить фактором цифровизации, проявляющимся в повсеместном внедрении сквозных технологий, безбарьерной коммуникации, неразрывной интеграции прорывных инноваций и информационных технологий.

Экосистемная цифровизация выступит катализатором резкого сокращения трансакционных и логистических издержек, повышения реализации товаров и услуг, сокращением времени поиска информации, эффективной трансформации отношений, что крайне важно для российских регионов, расположенных на обширной территории, обладающих различным ресурсным потенциалом.

Секция X
Современные проблемы образования

М. Р. Бортковская (Санкт-Петербург)
mbort@mail.ru

АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТЕКУЩЕЙ УСПЕВАЕМОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОЧНОГО ФОРМАТА КОНТРОЛЬНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ К ДИСТАНЦИОННОМУ И ОБРАТНО

При проведении коллоквиумов по математике на I курсе (СПбПУ, «Прикладная механика») выявлены и проанализированы показатели успеваемости при разных форматах опроса. Участие студентов в коллоквиумах добровольно (при успешном ответе материал коллоквиума не выносится на экзамен); опрос проводился в тестовой форме очно или дистанционно (с использованием платформы Moodle). В одинаковых семестрах разных лет объем тестов и структура вопросов были максимально схожи. В 2019/20 г. сессия I семестра была очной, а в 21/22 году — дистанционной. Полученные результаты таковы.

2019/20 уч. год

1) I семестр, тема «Векторная алгебра» (очное тестирование): количество участников (от общего количества студентов потока) 91%, оценок «неудовлетворительно» 47%, «удовлетворительно» 34%, «хорошо» 12%, «отлично» 7%.

2) II семестр, тема «Неопределенный и определенный интеграл» (электронное тестирование, дистанционно): количество участников 93%, «неудовлетворительно» 32%, «удовлетворительно» 32%, «хорошо» 27%, «отлично» 9%.

2021/22 уч. год

1) I семестр, тема «Предел и непрерывность функции» (дистанционно): количество участников 91%, «неудовлетворительно» 54%, «удовлетворительно» 26%, «хорошо» 13%, «отлично» 7%.

2) II семестр, тема «Интеграл» (очно): количество участников 30%, «неудовлетворительно» 56%, «удовлетворительно» 24%, «хорошо» 17%, «отлично» 3%.

Предварительно можно сделать вывод: начинать адаптацию первокурсников к вузовским требованиям и формам контроля надо с очного опроса. Дистанционные формы также необходимо применять, для создания и анализа тестов Moodle имеются всевозможные разработки, например, отраженные в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Создание тестов в системе дистанционного обучения Moodle 2.2: электрон. метод. указания (сост. Стенгач М.С.) https://docplayer.com/30041469-Sozdanie-testov-v-sisteme-distancionnogo-obucheniya-moodle-2-2.html

2. *Нестеров С. А.* Анализ статистики выполнения тестовых заданий в

среде дистанционного обучения Moodle//Современные информационные технологии и IT-образование. 2016, №4, с. 62–64.

Б. И Голубов (Долгопрудный)
Golubovboris1939@gmail.com

РАЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА МЕТОДОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕРАВЕНСТВ

В математическом анализе важную роль играют формула Тейлора и ряд Тейлора. Строгий вывод формулы Тейлора с различными видами остаточных членов требует предварительной подготовки и занимает некоторое время при изложении этой темы на лекциях.

Однако для разложения основных элементарных функций в ряд Тейлора и для доказательства формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для этих функций можно использовать метод интегрирования неравенств. Этот метод для функций $\sin x$ и $\cos x$ изложен, например, в книге Р. Куранта и Г. Роббинса ([1], с. 617), а также в статье автора [2].

В докладе будет изложен этот метод для функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ (см. [4]).

Отметим, что указанные выше функции называются основными элементарными функциями (см. [3], с. 33).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов // ОГИЗ, Москва–Ленинград, 1947.

2. *Голубов Б.И.* Что такое ряд Тейлора? // Квант, № 5. 1979. С. 2–7.

3. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа // Москва: Наука, 1989.

4. *Голубов Б.И.* Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора методом интегрирования неравенств // Евразийское научное объединение, № 8 (66). 2020. С. 28–34.

С. А. Докучаев, Б. Б. Конкин, Г. С. Костецкая (Ростов-на-Дону)
galina.kostezkaya@gmail.com **ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС КАК КЛЮЧЕВОЙ ЭЛЕМЕНТ ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА**

Федеральные государственные образовательные стандарты нового поколения полностью меняют взгляд на реализацию образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Эффективная подготовка специалиста в техническом вузе требует использования новых подходов к обучению, включая онлайн-обучение.

В этих условиях неизбежно происходит частичный перенос образовательного процесса в электронную среду, что невозможно без полноценного функционирования современной цифровой образовательной среды в вузе.

Цифровая образовательная среда современного вуза строится на базе систем управления обучением (Learning Management System, LMS), наиболее распространенными из которых являются LMS Moodle и LMS MasterStudy. Данные LMS не только обеспечивают педагогические условия для эффективного дистанционного обучения студентов и их оперативного взаимодействия с преподавателем посредством чата, анкетирования, тестирования, форумов, опросов, рабочих тетрадей, семинаров [1], но также являются мощным инструментом для построения цифровых образовательных курсов по различным дисциплинам.

Перед преподавателем, создающим цифровой курс, возникают три основные проблемы:

1) обеспечить непрерывное, в том числе и удаленное, взаимодействие между всеми участниками образовательного процесса;
2) создать условия для плодотворной самостоятельной работы обучающихся, стимулировать их к саморазвитию и самообучению;
3) разработать средства цифрового контроля знаний обучающихся.
Решение первой проблемы невозможно без использования современных средств визуализации учебного контента: интерактивных виртуальных досок (Miro, Padlet, Scrumlr и др.), модулей видеоконференций (VK звонки, Яндекс.Телемост), цифровых платформ для проведения стримов (Discord). При проведении онлайн-занятий весьма эффективно использование инфографики - графического способа подачи информации, данных и знаний, целью которого является быстро и чётко преподносить сложную информацию. Задачи инфографики, как образовательной технологии, заключаются в том, чтобы акцентировать внимание и улучшить качество восприятия передаваемого сообщения; повысить продуктивность обучения; сэкономить время для осознания и осмысления [2].
Для стимулирования познавательной активности обучающихся в цифровой курс легко могут быть интегрированы разнообразные игровые эле-

менты на базе технологии H5P в рамках LMS MasterStudy. Современные LMS также содержат эффективные инструменты для разработки тестовых заданий с гибкой системой оценивания и контролем времени на их выполнение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Ефимов С. В.* О цифровых образовательных технологиях в образовательной экосистеме технического вуза. Труды СКФ МТУСИ. Международная научно-практическая конференция СКФ МТУСИ, Ростов-на-Дону. 2021, с. 363–365.
2. *Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Светличная Н. О., Колдынская Л. М.* Современные средства визуализации учебного контента. Труды СКФ МТУСИ. Международная научно-практическая конференция СКФ МТУСИ, Ростов-на-Дону. 2021, с. 365–367.

Е. О. Ермолаева (Москва)
eoermolaeva@yandex.ru

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ И РЫНКА ТРУДА

Профессиональное образование следует за потребностями рынка труда. В экономике РФ распределение женщин и мужчин по видам экономической деятельности традиционно имеет гендерный дисбаланс, и приходящие кризисы по-разному отражаются на их занятости в экономике. Выводы отчета ООН за декабрь 2021 г. свидетельствуют о том, что во всем мире женщины больше пострадали от воздействия пандемии (двойная занятость, потеря или сокращение оплачиваемой работы), и в ответных государственных мерах на нее [1]. Всемирный Экономический Форум ежегодно публикует доклад, выявляющий различие между женщинами и мужчинами в доступе к ресурсам и возможностям в своих странах. В 2021 г. в рейтинге по индексу гендерного неравенства Россия занимает 81 место из 156 стран. Но мы находимся в группе лидеров по «вовлечению во все виды образования» и по «занятости женщин среди профессиональных и технических работников». Перед началом пандемии в выпуске по уровням образования девушек и юношей было поровну среди выпускников специалистов среднего звена, среди студентов – 57% и 43%, среди аспирантов – 49% и 51%, соответственно [2]. За последние пять лет доля женщин среди руководителей всех уровней в РФ возросла с 38% до 46%. Среди специалистов высшего уровня квалификации женщин 63%, хотя в области науки и техники 32%, а в информационно-коммуникационных технологиях лишь 18% [3]. Для достижения паритета их участия в экономике нужны программы, привлекающие девушек к получению как образования, так и дальнейшего удержания и занятости в области естественных наук, технологий, инженерии и математики (STEM). В эпоху широкой цифровизации прогнозируется исчезновение множества «женских» рабочих мест, связанных с выполнением рутинных задач, и еще большее появление инновационо новых, что безусловно повлияет на трудоустройство женщин. Сегодня в мировой экономике [4] видна явная гендерная сегрегация: доля женщин в областях, активно использующих развитие новых технологий, составляет в секторе разработки продукции 35%, данные и искусственный интеллект 26%, в инженерии 15%, в облачных вычислениях 12%. Ставится задача организации широкой системы переподготовки женщин, уже имеющих базовое образование, для набора в специальности будущего в целях избежания потерь потенциальных талантов в данных областях, а также активного продвижения женщин на руководящие позиции и лидерские роли. Необходим баланс между спросом на инновационные рабочие места и предложением готовых кадров со стороны вузов. На первый план выходит также междисциплинарное образование и профессиональная переподготовка молодых кадров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Women and girls left behind: Glaring gaps in pandemic responses | UN Women Data Hub
2. Женщины и мужчины России. Стат. сборник // М.: Росстат, 2020.
3. Труд и занятость в России. Стат. сборник // М.: Росстат, 2021.
4. www.weforum.org/reports/global-gender-gap-report-2021

Г. А. Зеленков, Е. В. Мазанько (Новороссийск)
mathshell@mail.ru, mailsl@mail.ru

ТЕОРЕМА ШВАРЦА О РАВЕНСТВЕ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В курсе высшей математики для инженерных специальностей имеется большой набор понятий, определений, утверждений, которые всегда (в разном объеме) сопровождались аналитическими описаниями и доказательствами. В связи с тенденцией сокращения часов по математическим дисциплинам и наличием большого числа математических пакетов программ можно компенсировать эту тенденцию цветной визуализацией в статике (слайды) и динамике (видео). Можно использовать промежуточный вариант, т.е. пошаговую динамику. Это позволяет заменить или дополнить аналитические доказательства, математические понятия, определения и методы их графическими образами. Очевидно, такой подход давно известен и применяется в связи с активным использованием дистанционного образования. В представленной работе показано, как можно достаточно доступно подать сложный материал для понимания с помощью визуализации. В качестве примера такого подхода, показаны тонкости теоремы Шварца о равенстве смешанных производных второго порядка для функций двух переменных. Показано, как можно использовать графические и вычислительные возможности математических пакетов символьной математики для анализа, в частности, теоремы Шварца. Причем так, чтобы это понимали студенты с обычной подготовкой по математике в части знаний пределов и дифференцирования функции двух переменных. В математике под равенством вторых смешанных производных понимается возможность при определенных условиях поменять порядок дифференцирования при вычислении смешанных производных от функции без потери их равенства. Условиями для выполнения такого равенства занимались: Шварц, Клеро, Юнг и другие известные математики в течении более, чем 150 лет. Полную драматизма историю можно найти в литературе и в интернете. Поиски примеров, относящихся к теореме Шварца дали немного. Следует добавить, что при анализе найденных примеров в литературе и на сайтах нами были добавлены расчеты, исправлены неточности и опечатки, найдены интервалы предельных значений при изучении разрывов вторых производных. Кроме того, приведены графики поверхностей функции и ее производных в окрестности особых точек. В работе представлен один мало известный пример, на котором систематически показано, что дает для математического анализа использование визуализации в дополнение к аналитике. Представленный пример интересен тем, что с помощью двух параметров, входящих в его задание мы смогли получить, как одинаковые вторые смешанные производные, так и не совпадающие. Причем, в обоих случаях сами смешанные производные не являются непрерывными. Заметим, что первое доказывает то, что теорема Шварца является только достаточной. На рассмотренной задаче показано, как обучающийся может получить исследовательские навыки работы с аналитическими выкладками и умения использовать графические программы. Точнее, посредством, например, выполнения научной студенческой работы учащийся получает навыки и умения для выполнения достаточно сложных вычислений и представления пространственных математических объектов с помощью графических программ необходимых для построения плоского изображения, позволяющего получить однозначное восприятие рисунков как трехмерных объектов. Такой подход к подаче информации и ее изображению (интерфейс) интенсивно развивается везде, где информация приходит в виртуальном виде на экраны компьютеров.

М. Д. Макаренко (Владикавказ)
mahadrum@yandex

КЕЙС-ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ. ЯЗЫКИ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

Суть кейс-метода можно вкратце описать как «от практики к теории», от проблемы к поиску решения. Создание проблемной ситуации — едва ли не единственный образовательный инструмент, формирующий естественную мотивацию для поиска новых знаний или технологий. Активная позиция учащегося, формирующаяся при поиске ответа в ситуации кейса, автоматически требует от него расширения горизонтов познания.

Наличие базы хороших кейсов позволит разнообразить учебный процесс и подготовить учащихся к реалиям жизни, в которых не существует однозначно правильных решений. При этом кейс должен «цеплять» школьника тематически, а не становиться новой абстракцией, которыми изобилуют школьные программы. Поэтому нельзя механически переносить в образовательную программу, например, бизнес-кейсы.

Автором разработан кейс «Язык и нейронные сети». С одной стороны, технология нейронных сетей является трендом, с другой — кажется школьникам некоторой непостижимой магией. При этом в быту языковые технологии, такие как голосовые помощники и переводчики, уже не кажутся чем-то примечательным. Задачей кейса является демонстрация работы с простыми нейронными сетями в доступной школьникам форме, но при этом с учетом сложностей языковых технологий. Простая задача определения языка, на котором написано слово, позволит сравнить статистические методы и технологии нейронных сетей.

Для перевода текстов с 60-х годов XX столетия было предложено огромное число подходов, но только современные технологии привели к качественному рывку и внедрению научных исследований в повседневность. Одной из подзадач этой технологии можно считать определение языка, к которому относится слово. Ведь если использовать подход, основанный на правилах, то нужно точно представлять, в каком словаре искать слово. Огромное количество исследователей работают с небольшим пулом популярных языков, и очень мало внимания уделяется малым или так называемым малоресурсным языкам. В кейсе используется русский и осетинский язык, однако предложенные подходы могут быть применены к любой паре языков.

В ходе работы над кейсом используются базовые знания по программированию на языке Python, инструмент Google Colab и библиотеки nltk и tensorflow. Необходимы навыки работы со строками и файлами, структурами данных, такими как словари и списки. Кейс предназначен для школьников старше 13 лет и может представлять собой серию занятий общей продолжительностью от 2 до 6 академических часов. Кейс разбит на несколько этапов, моделирующих работу исследователей. Первый этап ставит задачей определение языка по количеству гласных и согласных в словах. Такой подход позволяет познакомить учащихся с понятиями кластера и классификации. Второй этап — использование n-грамм, достаточно стандартного подхода в лингвистике. Расчет статистики биграм для разных языков позволяет получить хорошие устойчивые результаты в определении языка слова. Использование нейронных сетей для повышения качества распознавания кажется естественным для учащихся. Поэтому на третьем этапе подготовка большого количества данных и использование простейших нейронных сетей продемонстрируют требовательность современных технологий и приведут к пониманию, что безошибочных подходов, решающих задачи на 100%, не существует.

Кейсы прекрасный инструмент для оправданного получения новых знаний и изучения технологий, позволяющий получать навыки в результате активных самостоятельных действий в условиях противоречий.

Все материалы по кейсу https://clck.ru/ggV9Y.

Л И Т Е Р А Т У Р А

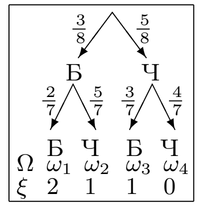
1. *Калинина С. Н.* Использование кейс-технологии в образовательном процессе, https://dopobr.68edu.ru/archives/14376 2. Введение в кейс-метод: что такое кейсы и зачем они нужны. // https://changellenge.com/article/chto-takoe-keysy/ 3. *Таланов С. Л.* Влияние социальных сетей на успеваемость студентов. Социально политические исследования // 2009 №2(11), стр.117-135 4. *Журавлева Д. М.* Вконтакте или В учебе? Влияние социальных сетей на успеваемость студентов факультета экономики НИУ ВШЭ. Аннотация ВКР ВШЭ // https://www.hse.ru/edu/vkr/125363404 5. *Васильев Ю.* Обработка естественного языка Python и Spacy на практике. Питер, 2021. 6. *Жижилкин Г.* Как определить язык текста? https://habr.com/ru/users/StopDesign/

М. Я. Спиридонов (Москва)
avt428212@mail.ru

О ПОСТРОЕНИИ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

На практике при обучении нахождению вероятностей событий предпочитают, как правило и к сожалению, обходиться эвристическими рассуждениями и (вопреки требованиям Колмогоровской аксиоматики) не строить вероятностного пространства. В противовес предлагается использовать ***метод последовательных испытаний***. Он полностью соответствует математическим основам теории вероятностей, вооружает учащихся единой активной методологией решения задач (в дискретном случае), прост и нагляден в изложении, удобен для восприятия. С сутью метода, методическими аспектами его применения в учебном процессе можно ознакомиться в монографии [1] и учебно-методическом пособии [2]. Описание общей конструкции вероятностного пространства, являющегося математической моделью последовательности нескольких испытаний с конечным количеством исходов, можно найти в учебнике [3].

Пример. Пусть из ящика с 3 белыми и 5 чёрными шарами наудачу извлекают два шара. Этот опыт можно разбить на два последовательных испытания: сначала берут первый шар, а затем второй. Соответствующее вероятностное пространство изображено на рисунке в виде орграфа-дерева (Б, Ч — белый, чёрный, веса́ — вероятности исходов испытаний).



Исходы ω_k отвечают различным маршрутам длиною 2 от корня.

Вероятность события определяется как сумма вероятностей благоприятствующих исходов. Так, если A = "вынуты разноцветные шары" = $\{\omega_2, \omega_3\} \subset \Omega$, то $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\omega_2) + \mathsf{P}(\omega_3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$.

Дискретная случайная величина явно описывается как числовая функция на Ω. На рисунке указаны значения на элементарных исходах величины ξ, равной количеству извлечённых белых шаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спиридонов М. Я.* Метод последовательных испытаний в вероятностных задачах. М.: Изд-во Моск. полиграф. ин-та, 1991. 100 с.

2. *Спиридонов М. Я.* Математика. Контрольные задания и методические указания для студентов заочной формы обучения. Семестр 4. М.: Моск. гос. ун-т печати, 2009. 300 с.

3. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987. 240 с.

Л. Н. Удовенко (Москва)
ln.udovenko@mpgu.su

ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Современные требования к организации образовательного процесса в условиях реализации новых образовательных стандартов обязывают учителя к перестройке концептуальных подходов к планированию учебного процесса. Серьезное внимание отводится «освоению обучающимися базовых навыков (в том числе когнитивных, социальных, эмоциональных), развитию личностных качеств, необходимых для решения повседневных и нетиповых задач с целью адекватной ориентации в окружающем мире, ... формированию культуры непрерывного образования и саморазвития на протяжении жизни» [1, С. 2]. Основой для формирования таких качеств служит процесс овладения основами наук, и главенствующая роль математики в этой связи бесспорна. Определение таких подходов осуществляется через трансформацию «понимания урока как ключевой единицы образовательного процесса» в сторону рассмотрения «серии учебных занятий», объединяющих урочные и внеурочные занятия, а также самостоятельную работу обучающихся, гибком сочетающиеся друг с другом. Эти три формы учебных занятий организуются специальным образом при активном деятельностном взаимодействии учителя и обучающихся.

Это взаимодействие проявляется на всех этапах организации и осуществления учебной деятельности, начиная с этапа целеполагания и завершая этапом внешнего и внутреннего (формирующего) оценивания. Особенности проектирования обучения на каждом этапе целесообразно сочетать с активным, разумно сочетающимся с традиционными формами обучения математике, применением нестандартных подходов, например, включением в занятие контекстно поставленных задач, постановкой проблемных ситуаций, рефлексивных задач и вопросов. Доказывают свою эффективность постановка и решение математических учебно-познавательных и учебно-практических задач. Этим вопросам посвящен доклад.

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования // Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 г. № 287 / http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (дата обращения — 14.04.2021 г.)

Содержание

Секция II Теория функций 30