Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский центр фундаментальной и прикладной математики (МЦФПМ)
Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ (РНОМЦ ЮФУ)
Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ
МОО «Женщины в науке и образовании»
НОУ Учебный центр «Знание»

XXIX Международная конференция Математика. Экономика. Образование.

XIII Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения.

27 мая – 3 июня 2023 г.
Пансионат «Панорама»

Материалы

http://conf-symp.sfedu.ru, e-mail: conf-symp@mail.ru

УДК 330.4+504+37 1Л4
XXIX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XIII Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Ростов н/Д, 2023. — 77 с.

Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к экономике, экологии, естественным наукам. Исследуются аспекты современного образования, без которых невозможно решение этих проблем. Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Международный симпозиум
Ряды Фурье и их приложения

В. И. Иванов (Тула)
ivaleryi@mail.ru

ОПЕРАТОРЫ СДВИГА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ [1]

Пусть $a > 0$, $k \geq 0$, $\lambda = \frac{2}{a}(k - \frac{1}{2}) > -1$, $c_\lambda^{-1} = 2a^\lambda\Gamma(\lambda+1)$, $d\mu_\lambda(x) = c_\lambda|x|^{2k+a-2}\,dx$, $j_\lambda(x) = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)J_\lambda(x)/x^\lambda$ — нормированная функция Бесселя,

$$b_{k,a}(x) = j_\lambda\Big(\frac{2}{a}|x|^{\frac{a}{2}}\Big) + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)}\frac{x}{(ai)^{2/a}}j_{\lambda+2/a}\Big(\frac{2}{a}|x|^{\frac{a}{2}}\Big),$$

$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} b_{k,a}(xy)f(x)\,d\mu_\lambda(x)$ — одномерное (k,a)-обобщенное преобразование Фурье [1], $\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}} b_{k,a}(xz)b_{k,a}(yz)\mathcal{F}_{k,a}(z)\,d\mu_\lambda(z)$ — оператор обобщенного сдвига.

Обобщенное преобразование Фурье является унитарным оператором. Классическое преобразование Фурье ($k = 0, a = 2$) и преобразование Данкля ($k > 0, a = 2$) его частные случаи. При $k \geq \frac{1}{2} - \frac{a}{4}$ его ядро ограничено, а при $a = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \geq \frac{1}{2}$, $|b_{k,a}(xy)| \leq 1$ [2] и для любого $y \in \mathbb{R}$, $\|\tau^y f\|_{p,d\mu_\lambda} \leq 4\|f\|_{p,d\mu_\lambda}$, $1 \leq p \leq \infty$ [3]. Однако оператор $\tau^y f(x)$ не является положительным и это вносит определенные неудобства при работе с ним. Рассмотрим оператор сдвига $T^y f(x) = (\tau^y f(x) + \tau^{-y} f(x))/2$.

Теорема 1. *Если $r \in \mathbb{N}$, $a = \frac{1}{r}$, $k \geq \frac{1}{2}$, то оператор сдвига $T^y f(x)$ положительный и для любой $f \in L_p(\mathbb{R}, d\mu_\lambda)$* и любого $y \geq 0$,

$$\|T^y f\|_{p,d\mu_\lambda} \leq \|f\|_{p,d\mu_\lambda}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Оператор $T^y f(x)$ удобно использовать при работе с операторами, определяемыми четными (радиальными) мультипликаторами.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ben Saïd S., Kobayashi T.,Ørsted B.* Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

2. *Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu.* On the kernel of (k,a)-generalized Fourier transform // arXiv: 2210.15730v1. 2022. 23 pp.

3. *Boubatra M. A.,Negzaoui S., Sifi M.* A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms and Special Functions. 1921. Vol. 33, no. 1. P. 1–17.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы "Приоритет 2030"по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике".

А. А. Кельзон, Л. В. Белякова (Санкт-Петербург)
kelzonaa@gumrf.ru, belyakovalv@gumrf.ru

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ (m,Φ)-ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В [1] было введено понятие функции (m,Φ)-ограниченной вариации, которое содержит в качестве частных случаев целый ряд обобщений понятия функции ограниченной вариации, введенных ранее разными авторами.

Пусть m-натуральное число, $\Phi=\{\varphi_n\},\ n\in\mathbb{N}$—последовательность строго возрастающих выпуклых вниз функций, заданных на множестве неотрицательных чисел и таких, что $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_{n+1}(x)\le\varphi_n(x)$ для всех n и x и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)=\infty$ для всех $x>0$.

Пусть вещественная функция f задана на отрезке $[a,\ b]$. Через $\{I_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, обозначим последовательность непересекающихся интервалов $I_n=(\alpha_n,\beta_n)\subset[a,b]$. (m,Φ)-вариацией функции f на $[a,\ b]$ называется величина $V_{m,\Phi}(f;a,b)=\sup\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(|\Delta^m f(I_n)|)$, где

$$\Delta^m f(I_n)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m-\nu}C_m^{\nu}f(\alpha_n+\nu h_n),\qquad h_n=(\beta_n-\alpha_n)/m,$$

а верхняя грань берется по всевозможным последовательностям интервалов $I_n=(\alpha_n,\beta_n)$, удовлетворяющим описанным условиям.

В частном случае $\varphi_n(x)=x/n$ вместо $V_{m,\Phi}(f;a,b)$ пишем $V_{m,H}(f;a,b)$ и называем эту величину m-гармонической вариацией функции f на $[a,\ b]$.

Теорема 1. *Пусть последовательность функций Φ удовлетворяет описанным условиям, а функция f такова, что $V_{m,\Phi}(f;a,b)<\infty$. Тогда, если $[x,y]\subset[a,b]$, то $V_{m,\Phi}(f;x,y)\to0$, когда x и y одновременно сходятся к a или b.*

Теорема 2. *Пусть f—2π-периодическая функция такая, что $V_{m,H}(f;0,2\pi)<\infty$; $S_n(f,\cdot)$ — частная сумма порядка n ее тригонометрического ряда Фурье. Тогда в любой точке x_0 справедлива формула*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n'(f,x_0)}{n}=\frac{1}{\pi}(f(x_0+)-(f(x_0-)).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Кельзон А. А.* Функции (m,Φ)-ограниченной вариации и сходимость рядов Фурье // Изв. вузов. Матем. 1994. № 8. С. 29–38.

Г. Джангибеков, Г. Козиев (Душанбе, Таджикистан)
gulkhoja@list.ru, gulnazar88@mail.ru

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Классические сингулярные интегральные операторы Михлина – Кальдерона – Зигмунда имеют вид

$$(Af)(x) = \int_D \frac{\Omega(x,\theta)}{r^n} f(y)dy, \tag{1}$$

где D – конечная или бесконечная область эвклидового пространства E_n, $r = |x-y|,\ \theta = \frac{x-y}{r}$.

Общая теория уравнения $(Af)(x) = g(x)$ по всему E_n в $L_2(E_n)$ построена С. Г. Михлиным [1]. Разлагая характеристику $\Omega(x,\theta)$ в ряд Фурье по сферическим функциям С. Г. Михлин, каждому оператору A из (1) ставил в соответствие непрерывную символическую функцию $\mathscr{A}(x,\theta)$ и доказал, что если символ нигде не обращается в нуль, то для уравнения $(Af)(x) = g(x)$ с оператором A из (1) в пространстве $L_2(E_2)$ имеет место теория Фредгольма. Гохберг И. Ц. [2] доказал необходимость этого условия, а Симоненко И. Б. [3] обобщил указанный результат на пространство $L_p(E_2), p > 1$. Симоненко И. Б. также исследовал нетеровы свойства матричного сингулярного оператора A на гладком многообразии Γ с краем в пространстве $L_2^m(\Gamma)$ Эти результаты были обобщены Дудучавой Р.В. [4] на случаи пространств $L_p^m(\Gamma)$ $p > 1$. Однако, как указывает Симоненко И. Б. (см.[3], стр. 758), найденные условия нетеровости, сформулированные в терминах частных индексов граничных матриц - символа оператора A, не являются эффективными.

Пусть D – конечная односвязанная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$. В лебеговом пространстве с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ рассматривается оператор

$$(Af)(z) \equiv a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)} +$$
$$+ \iint_D \frac{\Omega_1(z,\theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta + \iint_D \frac{\overline{\Omega_2(z,\theta)}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta, \tag{2}$$

Разлагая характеристики $\Omega_j(z,\zeta)$ $(j = 1,2)$ в ряд Фурье по полярному углу θ, оператор из (2) можно записать в виде

$$A \equiv a_0(z)I + b_0(z)K + {\sum_{n=-m}^{m}}' \Big(a_n(z)I + b_n(z)K\Big)S_n + T, \tag{3}$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена $n = 0$; I – тождественный оператор, операторы K и S_n действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in \overline{D};$$

$a_n(z), b_n(z)$ $(n = 0, \pm 1, \cdots \pm m)$ – комплекснозначные непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функции, T– вполне непрерывный оператор.

В зависимости от $2m + 1$ гомотопического класса оператора A, установлены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и даны формулы для подсчета индекса оператора A из (2) (см.напр.[5],[6]). Полученные результаты применяются к задачам Дирихле и Неймана для эллиптических систем дифференциальных уравнений порядка $2m$.

1. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г. Михлин. — М. : Наука, 1962. — 254 с.

2. Гохберг И. Ц. К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений / И.Ц. Гохберг // ДАН СССР —1960. — № 6, 1960, С. —1279 – 1282.

3. Симоненко И. Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений / И. Б. Симоненко// Изв. АН СССР, сер. матем. —1965. I,II. —т. 29, — № 3, 4, С. —567 – 580; 757 – 782.

4. Duduchava R. On multidimensional singular integral operators / R. Duduchava// Jour. of Oper. Theory —1984. —I,II, —vol. 11, P. —41 – 76; —199 – 214.

5. Бойматов К. Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе /К. Х. Бойматов.,Г. Джангибеков// Успехи математических наук —1988. — Т. 43, вып. 3, (261), С. —171 – 172.

6. Джангибеков Г. Об одном классе сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем на плоскости / Г. Джангибеков// Докл. РАН —1993. —Т. 330, № 4, С. —415 – 419.

Н. Ю. Козловская, Е. А. Ровба (Гродно, Беларусь)
kozlowskaya_natalya@tut.by, rovba.ea@gmail.com

О СОПРЯЖЕННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ И ИХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ

Рассмотрим систему рациональных функций Такенаки-Мальмквиста

$$\varphi_0(z) = 1, \quad \varphi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\overline{\alpha_n}z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}, \tag{1}$$

$$\alpha_k \in \mathrm{C}, \quad \alpha_0 = 0,\ |\alpha_k| < 1,\ k = 1, 2, ...$$

Основываясь на системе функций (1) вводится рациональный ряд Фурье [1] и сопряженный с ним рациональный ряд Фурье [2].

Для произвольной суммируемой 2π-периодической функции $f(x)$ введем сопряженную с ней функцию [2]

$$\overline{f(x)} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt. \tag{2}$$

Теорема 1 (Признак Дини). *Пусть*

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_{n+k} = -\alpha_k,\ k = 1, 2, \dots, n$$

и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-|\alpha_k|) = +\infty$. *Если в точке* x *сходятся интегралы*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{|f(x\pm t)-f(x)|}{t}dt,$$

то последовательность $\{\overline{S_{2n}}(x,f)\}$ *частичных сумм сопряженного рационального ряда Фурье сходится в точке* x *к сопряженной функции (2).*

Рассмотрены приближения функции, сопряженной к функции $f(x) = |\sin x|^s$, $s > 0$, частичными суммами сопряженного рационального ряда Фурье. Для указанных приближений получены интегральное представление, поточечная и равномерная оценка, а также асимптотическая оценка в полиномиальном случае.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Джрбашян М. М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1956. Т. 9, № 7. С. 3–28.

2. *Китбалян А. А.* Разложения по обобщенным тригонометрическим системам // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1956. Т. 16, № 6. С. 3–24.

Ю. С. Крусс (Саратов)
krussus@gmail.com

О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ЖЕСТКИХ ФРЕЙМОВ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА [1]

Пусть $(G, \dot{+})$ - локально-компактная группа Виленкина, X — группа ее характеров, G_n - основная цепочка подгрупп, а $G_n^{\perp}$ — аннуляторы подгрупп G_n. Через $\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ обозначим множество ступенчатых функций постоянных на смежных классах по подгруппе G_M с носителем в G_{-N}.

Теорема 1. [1] *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ масштабирующая функция с маской m_0. Определим маски $m_j : j = 1, 2, ..., q$ так, что*
1) $\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_j(\chi) = \mathbf{1}_{E_j}(\chi)$, где $E_j = G^{\perp}_{-s(j)} r^{\alpha_{-s(j)}}_{-s(j)} r^{\alpha_{-s(j)+1}}_{-s(j)+1} ... r_0^{\alpha_0} ... r_M^{\alpha_M}$ дизъюнктные смежные классы, и $E_j\mathcal{A}^t$ дизъюнктные множества;
2) существуют целые числа $t(j) \geq 0$, такие что

$$\bigsqcup_j E_j\mathcal{A}^{t(j)} = G^{\perp}_{M+1} \setminus G^{\perp}_M.$$

Тогда функции $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, ..., \psi^{(q)}$ порождают жесткий фрейм.

По алгоритму, изложенному в работе [2], построим маску m_0 и масштабирующую функцию $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$. Затем найдем множества E_j. Для $k = \overline{0, M+N-1}$ последовательно рассмотрим разности $G^{\perp}_{M+1-k} \setminus G^{\perp}_{M-k}$. В первой из них обязательно найдется хотя бы один смежный класс $G^{\perp}_{-N+1}\xi$, где $\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \neq 0$. Возьмем его за E_1. При этом $E_1\mathcal{A}^{-1}$ обязательно попадет в следующую разность в другой смежный класс $G^{\perp}_{-N+1}\eta$, на котором также $\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \neq 0$. В качестве E_{2_β} возьмем сдвиги $E_1\mathcal{A}^{-1}$ внутри $G^{\perp}_{-N+1}\eta$, отличные от $E_1\mathcal{A}^{-1}$. Продолжая, мы дойдем до $G^{\perp}_{-N+1}$, где $\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) = 1$. Таким образом искомые множества E_j из теоремы 1 будут построены, а следовательно определены жесткие фреймы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лукомский С. Ф., Водолазов А. М.* О p-адических жестких вейвлет фреймах // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й международ. Сарат. зим. шк. Саратов, 2022. С. 181–184.

2. *Berdnikov G. S., Kruss Iu. S., Lukomskii S. F.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic // Turkish Journal of Mathematics. 2017. V. 41, №. 2. P. 244–253.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/).

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба (Гродно, Беларусь)
pahamatby@gmail.com rovba.ea@gmail.com

ОБ ОЦЕНКАХ РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА[1]

Наиболее значимый результат в полиномиальной аппроксимации функции $|x|$ на отрезке $[-1,1]$ был получен в 1914 году С. Н. Бернштейном [1]. В 1964 году Д. Ньюменом [2] была построена рациональная функция, которая в значительной степени улучшала порядок равномерных приближений функции $|x|$ на отрезке $[-1,1]$, полученный С. Н. Бернштейном. Результат Д. Ньюмена придал новый импульс в исследованиях наилучших равномерных рациональных приближений функции $|x|$ на отрезке $[-1,1]$, а параметры $\xi_k = \mathrm{e}^{-k/\sqrt{n}}, k = 0,1,\ldots,n$, и их модификации оказались полезными в рациональной аппроксимации функций со степенной особенностью.

В 1979 году Е. А. Ровба [3] ввел рациональный интегральный оператор, обобщающий частичные суммы полиномиального ряда Фурье–Чебышёва. В [4] с использованием этого метода была получена оценка равномерных рациональных приближений с определенной мажорантой функции $|x|^s, s>0$, на отрезке $[-1,\,1]$.

В докладе проводится построение метода исследования асимптотического поведения мажоранты равномерных приближений на основании классического метода Лапласа. С помощью этого метода найдены оценки равномерных приближений без ограничений на количество геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Установлена оценка равномерных приближений функции $|x|^s$, $s>0$, на отрезке $[-1,\,1]$, когда параметры аппроксимирующей функции являются модификацией «ньюменовских параметров».

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Bernstein S.* Sur la meilleure approximation de $|x|$ par de polynómes de degrés donnés // Acta Mathematica. 1914. Vol. 37, iss. 1. P. 1–57.

2. *Newman D. J.* Rational approximation to $|x|$ // The Michigan Mathem. Journal. 1964. Vol 11, iss. 1. P. 11–14.

3. *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Доклады АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

4. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 2. С. 362–386.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ (№ 20162269).

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Т. М. Оснач (Гомель)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com, osnach@gsu.by

СОВМЕСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ [1]

Пусть $\mathbf{f^t} = (f_1^t, ..., f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx \right), \quad j = 1, 2..., k \tag{1}$$

с действительными коэффициентами. Для фиксированного индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$. Рассмотрим аналог $\mathbf{A^t}$ задачи $\mathbf{A}$ (см. [1; гл. 4, §1, задача A]) о совместной аппроксимации степенных рядов, для системы тригонометрических рядов (1).

В формулировке следующей теоремы используются обозначения введенные в [2,3]. Эта теорема дополняет результаты работы [2].

Теорема 1. *Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f^t}$ задача $\mathbf{A^t}$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс $(n, \overrightarrow{m})$ был слабо нормальным для $\mathbf{f^t}$, т.е. $rank\, H^t_{n,\overrightarrow{m}} = 2m$. Если $rank\, H^t_{n,\overrightarrow{m}} = 2m$, то при определенном выборе нормирующего числового множителя для решений задачи $\mathbf{A^t}$ справедливы представления: для $j = 1, ..., k$*

$$Q^t_{n,\overrightarrow{m}}(x; \mathbf{f^t}) = D(n, \overrightarrow{m}; x)\,,$$

$$P^t_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(x; \mathbf{f^t}) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \overrightarrow{m}) e^{ipx}\,,$$

$$R^t_{j,n,\overrightarrow{m}}(x; \mathbf{f^t}) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \left(d_p^j(n, \overrightarrow{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \overrightarrow{m}) e^{-ipx} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988. 256 с.

2. *Лабыч Ю. А., Старовойтов А. П.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 7. С. 107–130.

3. *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* О детерминантных представлениях многочленов Эрмита–Паде. Труды Московского математического общества. 2022. Т. 83, № 1. С. 17–36.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

В. И. Щербаков (Жуковский)
kafmathan@mail.ru (для В.И.Щербакова)

ОБ УПОРЯДОЧИВАНИИ И ВАРИАЦИИ ФУНКЦИЙ НА НУЛЬМЕРНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

Аннотация

Показано, что вариация функции (согласно её «классическому» определению) на нульмерной компактной абелевой группе зависит от отображения этой группы на отрезок $[0,1]$, то есть от выбора базисных элементов. Существуют функции, которые являются функциями ограниченной вариации (и даже монотонными функциями) при одном выборе базисных элементов (и связанным с этими базисными элементами понятием упорядочивания) и не будут иметь ограниченной вариации относительно другого набора базисных элементов.

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, состоящая из простых чисел;
$m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$ и G — нульмерная компактная абелева группа (группа Виленкина [1]) с операцией $\oplus$, обратной операцией $\ominus$, нулевым элементом 0_G, системой вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots \text{ таких, что } \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\} \quad (1)$$

и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок $p_n \, (n = 1, 2, \ldots)$.

Заданные в (1) подгруппы G_n являются системой окрестностей нуля в группе G. Таким образом в G определенна топология, относительно которой вводятся понятия сходимости и непрерывности функции. Относительно этой топологии группа G является компактом.

В каждом из множеств $G_{n-1} \setminus G_n$ зафиксируем элемент $e_n \, (n = 1, 2, \ldots)$, который назовем базисным. Всякий элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1 \cdot e_1 \oplus x_2 \cdot e_2 \oplus \ldots \oplus x_n \cdot e_n \oplus \ldots, \text{ где } x_k \text{ — целые с } 0 \le x_k \le p_k - 1. \quad (2)$$

Тогда элемент $x \in G$ отображается на отрезок $[0,1]$

$$x \mapsto x_E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k} \text{ , где } x_k \text{ определены в (2) ,} \quad (3)$$

а $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ранее заданная система базисных элементов. Умножение элемента g группы G на целое неотрицательное число n определяется следующим образом:

$$0\cdot g = 0_G;\ 1\cdot g = g \text{ и } n\cdot g = \underbrace{g \oplus g \oplus g \ldots \oplus g}_{n \text{ раз}}$$

Отображение группы G на отрезок $[0,1]$, заданное по формуле (3), иногда называют *отображением Монна* [2] (см,. например, [3]), хотя отображения группы G на отрезок $[0,1]$ были известны ещё и Н. Я. Виленкину [1].

Взаимнооднозначность при отображении (3) нарушается лишь в точках вида

$$r+ =< \frac{l}{m_n} >= x_1\cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}\cdot e_{n-1} \oplus x_n\cdot e_n \text{ и} \qquad (4)$$

$$r- =< \frac{l}{m_n} > - = x_1\cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}\cdot e_{n-1} \oplus (x_n - 1)\cdot e_n \oplus \ldots \oplus (p_{n+1} - 1)\cdot e_{n+1} \oplus \ldots \oplus (p_{n+k} - 1)\cdot e_{n+k} \oplus \ldots, \qquad (5)$$

которые при отображении (3) переходят в одно и то же число $r = \frac{l}{m_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k}$.

На группе G вводится понятие упорядочивания точек следующим образом: $x < y$, если $x_E < y_E$, где x_E и y_E образы точек $x \in G$ и, соответственно, $y \in G$ при заданного формулой (3) отображении Монна, а также $r- < r+$, где $r-$ определена формулой (5), а $r+$ — равенством (4).

Упорядочивание можно определить и эквивалентным образом:

$$x = x_1\cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_n\cdot e_n \oplus \ldots < y = y_1\cdot e_1 \oplus \ldots \oplus y_n\cdot e_n \oplus \ldots,$$

если $x_k < y_k$, где $k = \min\{n \in \mathbb{N} | x_n \neq y_n\}$.

Вариацию от функции (под функцией будем понимать отображение группы G во множество действительных чисел $\mathbb{R}$; могут рассматриваться также и монотонные функции) определяем "классическим" образом (см., например [4]): пусть

$$T = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n | 0_G = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1_{GE}\} - \qquad (6)$$

некоторое разбиение группы G, где $1_{GE} = (p_1 - 1)\cdot e_1 \oplus (p_2 - 1)\cdot e_2 \oplus \ldots \oplus (p_n - 1)\cdot e_n \oplus \ldots$ — точка группы G, образом которой при отображении Монна (3) является единица (1_{GE}, вообще говоря, зависит от выбора базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Тогда *вариация* от функции $f(t)$ на группе $G : V(G) = \sup\limits_{T}(\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|)$, где верхняя грань по всем разбиениям T (6) группы G. При этом если эта верхняя грань конечна, то функция $f(t)$ называется функцией *ограниченной вариации,* иначе — функцией *неограниченной вариации.*

Эта вариация зависит от базиса $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, что отмечал ещё Н.Я.Виленкин [1]. Более того, даже сам класс функций ограниченной вариации на группе G зависит от базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Справедлива следующая

теорема. *Для всякого базиса* $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *найдётся функция ограниченной вариации (и даже монотонная) относительно этого базиса* $f(x)$, *и другие базисные элементы* $\tilde{E} = \{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, *относительно которых та же функция* $f(x)$ *уже не имеет ограниченной вариации на* G.

Для $\sup\limits_{n} p_n = \infty$ предыдущая теорема была анонсирована в [5].

Список литературы

[1] *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // «Изв. АН СССР. сер. матем.» — 1947, — Т. 11. —№ 4, С.363–400.

[2] *Monna F.* Analysis non Archimedience // 1970, Berlin — Heildelberg — New-York — Springer-Verlag.

[3] *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный p-адический анализ и Математическая физика: теория и приложения // 2012, Москва, Физматгиз.

[4] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды // 1961, Москва, Физматгиз.

[5] *Щербаков В. И.* О вариации функции на нульмерной компактной абелевой группе // 2021, XXVII Международная конференция. Математика. Экономика. Образование, XI Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения, Ростов-на-Дону, С. 23–24.

Секция I Дифференциальные уравнения

И. А. Андреева, Т. О. Ефимова (Санкт-Петербург)
andreeva_ia@spbstu.ru

О судьбе и вкладе профессора ЛГУ-СПбГУ Алексея Федоровича Андреева (1923–2017) в развитие качественной теории ОДУ и ДС. К 100-летию со дня рождения.

В 2023 г. отмечается 100-летие со дня рождения Алексея Федоровича Андреева (1923–2017), профессора кафедры Дифференциальных уравнений мат-мех. факультета ЛГУ — СПбГУ (1966–2017), заслуженного деятеля науки РФ (1999), почетного профессора СПбГУ (2008). А.Ф. Андреев родился в деревне Межник Псковской области. Непростое детство в крестьянской семье заложило в сознание мальчика глубокую порядочность и стойкость, любовь и уважение к труду и творческому человеку. Пройдя через Ленинградский фронт ВОВ в роли военного топографа, получив в 1943 г. тяжелейшее ранение, приведшее к ампутации правой ноги и к 1,5 годам в госпиталях блокадного Ленинграда, А.Ф. Андреев в 1945 г. поступил на мат-мех ЛГУ (СПбГУ).

В 1953 г. защитил в МИАН СССР под руководством Н. П. Еругина кандидатскую диссертацию «Исследование поведения интегральных кривых системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки», каждая из 3 глав которой могла быть отдельной диссертацией [3]. В ней довершил начатое А. Пуанкаре изучение изолированной особой точки плоской автономной аналитической системы. В докторской диссертации «Исследование сложных особых точек систем дифференциальных уравнений» (1981, ЛГУ) разработал метод исследования сложной особой точки покоя аналитической динамической системы. А. Ф. Андреев опубликовал 3 монографии и свыше 100 научных статей [1, 2, 3]. В последние годы своей творческой жизни А. Ф. Андреев сосредоточился на изучении полиномиальных динамических систем. Результатами стали как методология их исследования, так и детальная картина фазовых траекторий в круге Пуанкаре. А. Ф. Андреев награжден медалью «За оборону Ленинграда» (1942), орденом Красной Звезды (1943), орденом Отечественной войны I степени (1985), медалью «В память 300-летия Санкт-Петербурга» (2003).

Список литературы

[1] Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Минск, «Вышэйшая школа», 1979.
[2] Андреев А.Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. Издательство СПбГУ, 2003.
[3] Адрианова Л. Я., Бибиков Ю. Н., Изобов Н. А., Ильин В. А., Леонов Г. А., Миллионщиков В. М., Петров Н. Н., Плисс В. А., Розов Н. Х., Черкас Л. Э., Чурин Ю. В., Шемякина Т. К. К 85-летию А. Ф. Андреева. Дифференциальные уравнения, 3 (45), 291–296 (2009).

С. Н. Асхабов (Грозный)
askhabov@yandex.ru

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ[1]

Рассматривается начальная задача

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x k(x-t)u^{(4)}(t)\,dt, \quad x>0, \quad \alpha>1, \tag{1}$$

$$u(0) = u'(+0) = u''(+0) = u'''(+0) = 0. \tag{2}$$

Методом весовых метрик (аналог метода Белицкого) доказывается

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия*

$$k \in C^7[0,\infty),\ k^{(7)}(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),$$

$$k(0) = k'(0) = k''(0) = \ldots = k^{(6)}(0) = 0,\ k^{(7)}(0) > 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)}k^{(4)}(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^{4(5/3-\alpha)/(\alpha-1)}k^{(5)}(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)}k^{(6)}(x) = 0.$$

Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение в конусе

$$Q_0^4 = \left\{u(x) : u \in C[0,\infty) \cap C^4(0\,\infty),\ u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\right\}.$$

Изучен вопрос о приближенном решении задачи (1)-(2). Доказано, что решение можно найти методом последовательных приближений. Начальные задачи для уравнений вида (1) первого и второго порядков были изучены в [1] и [2], соответственно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Асхабов С. Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 6. С. 786–795.

2. *Askhabov S. N.* On a second-order integro-differential equation with difference kernels and power nonlinearity // Bulletin of the Karaganda University. Math. Series. 2022. № 2(106). P. 38–48.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ по проекту: Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи (FEGS-2020-0001)

А. В. Буробин (Обнинск)
burobin_av@mail.ru

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Продолжается исследование [1] линейного уравнения [2]

$$D^{\gamma}_{0+} f = a(x) f + F(x) \tag{1}$$

дробного порядка $\gamma \in (0,1)$ в пространствах $C^{(-\alpha)}([0,1])$, $\alpha \geq 0$, получающихся при расширении пространства $C^{(0)}([0,1])$ в связи с дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка γ

$$I^{\gamma}_{0+}\varphi(x) = \Gamma^{-1}(\gamma) \int\limits_0^x (x-t)^{\gamma-1}\varphi(t)dt.$$

Здесь $D^{\gamma}_{0+} = [I^{\gamma}_{0+}]^{-1}$.

Уравнение (1) обычно дополняется начальным условием

$$I^{1-\gamma}_{0+}(f)|_{x=+0} = b. \tag{2}$$

Получается задача типа Коши (1), (2).

Пусть далее $\alpha + \gamma < 1$, а функции $F(x)$ и $a(x)f(x)$ в правой части уравнения (1) принадлежат $C^{(-\alpha-\gamma)}([0,1])$ при $f \in C^{(-\alpha)}([0,1])$. Тогда справедлива следующая

Теорема. *Решение уравнения (1)* $f \in C^{(-\alpha)}([0,1])$ *удовлетворяет условию (2) только при* $b = 0$.

Следствие. *Задача типа Коши (1), (2) не имеет решения* $f \in C^{(-\alpha)}([0,1])$ *при* $b \neq 0$.

В частности, отсюда следует, что решение $f \in C^{(-\alpha)}([0,1])$ уравнения (1) не может иметь особенности в точке $x = 0$ степени большей или равной $(1-\gamma)$, а начальное условие (2) оказывается излишним.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буробин А. В.* Уравнения дробного порядка в пространствах обобщенно интегрируемых функций // Тр. матем.центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2019. Т. 57. С. 77–78.

2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

С. А. Бутерин, С. В. Васильев (Саратов)
buterinsa@sgu.ru, i@vasilev-s-v.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТИПА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ[1]

Пусть $j \in \{0,1\}$, а $\{\lambda_{n,j}\}_{n\ge 0}$ – спектр краевой задачи $B_j(q)$ вида

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi,$$

$$y'(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \quad y(x) = y(0), \quad -a < x < 0,$$

где $a \in (0,\pi)$, а $q(x)$ – комплекснозначная функция из $L_2(0,\pi)$.

Теорема 1. *С некоторым $\omega \in \mathbb{C}$ имеют место асимптотики*

$$\lambda_{n,j} = \Big(n + \frac{1-j}{2}\Big)^2 + \omega \cos\Big(n + \frac{1-j}{2}\Big)a + \varkappa_{n,j}, \quad \{\varkappa_{n,j}\} \in l_2.$$

Пусть $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. Даны $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\lambda_{n,1}\}_{n\ge 0}$, найти $q(x)$.

До этого обратные задачи для операторов с запаздыванием исследовались только при $q(x) = 0$ п.в. на $(0,a)$ (см. обзор в [1]). Рассмотренный случай приводит к появлению члена с *замороженным аргументом* в уравнении. Для $2a \ge \pi$ доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если система синусов $\sigma := \{\sin(n_k + 1/2)x\}_{k\in\mathbb{N}}$ полна в $\mathcal{H} := L_2(0,\pi - a)$, то $q(x)$ в задаче 1 определяется однозначно.*

Обратно, если задание $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\lambda_{n,1}\}_{n\ge 0}$ однозначно определяет $q(x)$, то дефект σ не превосходит 1, *т.е.* $\dim(\mathcal{H} \ominus \sigma) \le 1$.

Поскольку $\{\sin(n + 1/2)x\}_{n\ge 0}$ полна в $L_2(0,\pi)$, оба полных спектра всегда определяют $q(x)$ однозначно при условии $2a \ge \pi$. Однако из результатов работ [2, 3] вытекает, что при $5a < 2\pi$ решение задачи 1 может быть не единственно и для полных спектров. Случаи остальных a в данной задаче требуют отдельного исследования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Buterin S.A., Malyugina M.A., Shieh C.-T.* An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays // Appl. Math. Comp. 2021. V. 411. Art. № 126475.

2. *Djurić N., Buterin S.* On non-uniqueness of recovering Sturm–Liouville operators with delay // CNSNS. 2021. V. 102. Art. № 105900.

3. *Djurić N., Buterin S.* Iso-bispectral potentials for Sturm–Liouville-type operators with small delay // Nonlin. Anal.: RWA. 2022. V. 63. Art. № 103390.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-21-00509).

С. А. Бутерин (Саратов)
buterinsa@sgu.ru

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ГЛОБАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ГРАФАХ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ[1]

Пусть $\nu \in \{0,1\}$, а $\{\lambda_{n,\nu}\}$ – спектр краевой задачи $\mathcal{B}_\nu$ вида

$$-y_j''(x) + q_j(x)y_j(x-a) = \lambda y_j(x), \quad 0 < x < 1, \quad j = \overline{1,m},$$

$$y_j(x-a) = y_1(x-a+1), \;\; \max\{0, a-1\} < x < \min\{a,1\}, \;\; j = \overline{2,m},$$

$$y_1(1) = y_2(0) = \ldots = y_m(0), \quad y_1'(1) = y_2'(0) + \ldots + y_m'(0),$$

$$y_1^{(\nu)}(0) = 0, \quad y_j'(1) + H_j y_j(1) = 0, \quad H_j \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{2,m},$$

на графе-звезде с запаздыванием $a \in (0,2)$. В [1] было дано определение операторов с глобальным запаздыванием и на произвольном дереве. Здесь $q_j(x)$ – комплексные функции из $L_2(0,1)$, такие что

$$q_1(x) = 0, \quad 0 < x < \min\{a,1\},$$

$$q_j(x) = 0, \quad 0 < x < \max\{0, a-1\}, \quad j = \overline{2,m}.$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По заданным спектрам $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$ найти $q_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, в предположении, что H_j, $j = \overline{2,m}$, и a известны априори.

В [2] для случая $a \ge 1$ доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть все H_j известны и попарно различны. Тогда задание спектров $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$ однозначно определяет все $q_j(x)$.*

Опираясь на результаты работ [3, 4], можно показать, что теорема 1, вообще говоря, неверна при всех $a \in (0, 4/5)$, однако остается справедливой при $a \in [4/5, 1)$, если $m = 2$. Случай же $m > 2$ для таких a требует отдельного исследования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Buterin S.* Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems // Res. Math. 2023. V. 78. Art. 79.

2. *Buterin S.* On recovering Sturm–Liouville-type operators with global delay on graphs from two spectra, arXiv:2304.14266 [math.SP], 2023.

3. *Djurić N., Buterin S.* On non-uniqueness of recovering Sturm–Liouville operators with delay // CNSNS. 2021. V. 102. Art. 105900.

4. *Djurić N., Buterin S.* Iso-bispectral potentials for Sturm–Liouville-type operators with small delay // Nonlin. Anal.: RWA. 2022. V. 63. Art. 103390.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-21-00509).

А. Н. Кондрашов (Волгоград)
alexander.kondrashov@volsu.ru

О МЕТОДЕ ПЕРРОНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В [1] предложен новый подход к постановке краевых задач типа задачи Дирихле для эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях (M, g), основанный на рассмотрении классов асимптотической эквивалентности "на бесконечности" функций из $C(M)$. В анонсируемом исследовании подробно изучены метрические и функциональные свойства этих классов. Будем обозначать их $\mathrm{CM}(M)$. Пусть метрика $g \in C^{(1,\alpha)}(M)$ и на (M, g) заданы: $B(x)$ — касательное векторное поле класса $C^{(0,\alpha)}(M)$, и функция $c(x) \leq 0$, $c(x) \in C^{(0,\alpha)}(M)$. Определим линейный оператор

$$L = \Delta + \langle B(x), \nabla \rangle + c(x). \qquad (1)$$

Для L стандартным образом определяются понятия L-гармонических (L-субгармонических, L-супергармонических) функций в любой области $\Omega \subset M$. Основной целью нашего исследования явилось перенесение классического метода Перрона [2] на случай обобщённой задачи Дирихле, когда под граничным значением функции $f(x) \in C(M)$ понимается класс $[f] \in CM(M)$ содержащий $f(x)$.

Для $\xi \in \mathrm{CM}(M)$ по аналогии с классическим случаем [2] вводятся верхний и нижний классы $\mathcal{U}_\xi$, $\mathcal{S}_\xi$, определяются функции $\underline{\mathrm{H}}_\xi(x) = \sup\limits_{f \in \mathcal{S}_\xi} f(x)$, $\overline{\mathrm{H}}_\xi(x) = \inf\limits_{f \in \mathcal{U}_\xi} f(x)$.

Теорема. *Пусть* $L \in C^{(0,\alpha)}$ *— линейный оператор вида* (1)*. Предположим имеются классы* $\xi, \eta \in \mathrm{CM}(M)$*,* $\eta \preccurlyeq \xi$*, и для них* $\mathcal{U}_\xi \neq \emptyset$*,* $\mathcal{S}_\eta \neq \emptyset$*. Тогда существуют и являются* L*-гармоническими функции* $\underline{\mathrm{H}}_\xi(x)$*,* $\overline{\mathrm{H}}_\eta(x)$*, причём* $[\underline{\mathrm{H}}_\xi(x)] \preccurlyeq \xi$*,* $\quad [\overline{\mathrm{H}}_\eta(x)] \succcurlyeq \eta$*.*

Полученные результаты используются для установления существования L-гармонических функций с «бесконечными данными на бесконечности» на многообразиях с симметриями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазепа Е. А.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях // Сиб. матем. журн., 43:3 (2002), С. 591–599.

2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Москва : Наука, 1989. 464 с.

M. A. Kuznetsova (Saratov)
kuznetsovama@info.sgu.ru

ON THE UNIFORM STABILITY OF RECOVERING STURM–LIOUVILLE OPERATORS WITH FROZEN ARGUMENT: SINGULAR CASE [1]

Consider the boundary value problem $\mathcal{B}(\gamma)$ determined as follows:

$$-(y^{\langle 1\rangle})'(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,\pi), \quad y^{\langle 1\rangle}(x) := y'(x) - y(a)\gamma(x), \tag{1}$$

$$y,\ y^{\langle 1\rangle} \in AC[0,\pi], \quad y(0) = y^{\langle 1\rangle}(\pi) = 0,$$

where $a \in [0,\pi]$ and $\gamma \in L_2(0,\pi)$. Equation (1) is obtained after regularization of the Sturm–Liouville operator with frozen argument $ly := -y''(x)+y(a)q(x)$, wherein $q = \gamma'$ is a singular coefficient in $W_2^{-1}(0,\pi)$.

Introduce $\theta_n = n-\frac{1}{2}$, $\xi_n = \int\limits_0^\pi \gamma(t)\cos\theta_n t\,dt$, $n \in \mathbb{N}$, and $\Omega = \{n \in \mathbb{N}\colon \sin\theta_n a = 0\}$. Using the approach in [1], one can prove that: 1) A sequence of complex numbers $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is the spectrum of $\mathcal{B}(\gamma)$ for some $\gamma \in L_2(0,\pi)$ if and only if for $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \rho_n^2$, $\rho_n = \theta_n + \kappa_n \sin\theta_n a$, where $\{\kappa_n\} \in \ell_2$; 2) The function γ is uniquely recovered given the part of the spectrum $\{\lambda_n\}_{n\in\overline{\Omega}}$, $\overline{\Omega} := \mathbb{N}\setminus\Omega$, and the coefficients $\{\xi_n\}_{n\in\Omega}$. Here, the part of the spectrum $\{\lambda_n\}_{n\in\Omega}$ was omitted because it is uninformative.

Let $\|\cdot\|$ be the classical norm in the space ℓ_2 and $\big\|\{x_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}} := \big\|\{x_n \sin^{-1}(\theta_n a)\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|$. For the problem of recovering γ by $\{\lambda_n\}_{n\in\overline{\Omega}}$ and $\{\xi_n\}_{n\in\Omega}$, we established the uniform stability.

Theorem 1. *Fix $r > 0$ and consider two boundary value problems $\mathcal{B}(\gamma)$ and $\mathcal{B}(\tilde\gamma)$ having spectra $\{\rho_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{\tilde\rho_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectively. If $\big\|\{\rho_n-\theta_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}} \le r$ and $\big\|\{\tilde\rho_n-\theta_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}} \le r$, then we have*

$$\|\gamma-\tilde\gamma\|_{L_2(0,\pi)} \le C_r \big\|\{\rho_n-\tilde\rho_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big\|\{\xi_n-\tilde\xi_n\}_{n\in\Omega}\big\|,$$

where $\tilde\xi_n := \int\limits_0^\pi \tilde\gamma(t)\cos\theta_n t\,dt$ and the constant C_r depends only on r.

R E F E R E N C E S

1. *Kuznetsova M.* Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm–Liouville operators with frozen argument // Applied Mathematics Letters. 2022. Vol. 131. P. 108035.

[1]This research was financially supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00509, https://rscf.ru/project/22-21-00509/).

Н. Ю. Мейерова (Иркутск)
nmejerova@gmail.com

КРАТНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Пусть $\Pi = (0, a) \times (0, b)$, где $a \geqslant b > 0$. Известно, что однородная граничная задача

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \lambda\varphi(\mathbf{r}),\ \mathbf{r} \in \Pi; \quad \varphi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}\in\partial\Pi} = 0;$$

имеет ненулевые линейно независимые решения

$$\varphi_{m,n}(\mathbf{r}) = A_{m,n} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y,$$

соответствующие значениям

$$\lambda_{m,n} = -\frac{\pi^2}{a^2}m^2 - \frac{\pi^2}{b^2}n^2,\ m,\, n \in \mathbb{N},$$

параметра λ. Здесь $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, числа $A_{m,n} \in \mathbb{R}$ произвольны и могут быть выбраны такими, что $\|\varphi_{m,n}(\mathbf{r})\| = 1$ в пространстве Соболева $H_0^\ell(\Pi)$, где $\ell \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Такая спектральная задача часто встречается при исследовании уравнений соболевского типа [1, 2], возникающих в физике сплошных сред. Автор данной заметки изучает кратность

$$\mathbf{m}(\lambda_{m,n}) = \dim\ker(\Delta - \lambda_{m,n} \cdot I)$$

собственных чисел $\lambda_{m,n}$ лапласиана $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Показано, что это значение совпадает с количеством решений некоторого диофантова уравнения второй степени относительно пар $(m, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ и зависит от квадрата отношения длин сторон прямоугольника Π, на котором задана рассматриваемая задача Дирихле. Для построения формулы кратности $\mathbf{m}(\lambda_{m,n})$ собственных чисел $\lambda_{m,n}$ оператора Лапласа была применена теорема о количестве представлений натурального числа суммой точных квадратов [3, с. 344].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Orlov S., Grunwald L., Shemetova V.* Initial boundary value problems for Sobolev type equations of hereditary continuum mechanics // J. Phys.: Conf. Ser. Vol. 1145. 012054.

2. *Orlov S. S., Shemetova V. V., Sokolova G. K.* Exact solutions of initial boundary value problems for Sobolev type equations of elastic oscillations // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2019. Vol. 597. 012079.

3. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987. 416 с.

А. Л. Скубачевский (Москва)
alskubachevskii@yandex.ru

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА–ПУАССОНА[1]

В докладе рассматривается первая смешанная задача для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем относительно вектор–функции $\{\varphi, f^+, f^-\}$, рассматриваемой в области $Q \times \mathbb{R}^3 \times (0,T)$. Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, $\varphi = \varphi(x,t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля в точке $x \in Q \subset \mathbb{R}^3$ в момент времени $t \in (0,T)$, $f^+ = f^+(x,v,t)\,(f^- = f^-(x,v,t))$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов (отрицательно заряженных электронов) в точке $x \in Q$ со скоростью $v \in \mathbb{R}^3$ в момент времени $t \in (0,T)$. Предполагается, что $\varphi|_{\partial Q\times(0,T)} = 0$ и $f^\pm|_{t=0} = f_0^\pm(x,v)$.

Эта задача описывает кинетику высокотемпературной плазмы в пробочной ловушке. Если достаточно большое число заряженных частиц попадает на стенку реактора, то либо реактор разрушается, либо плазма остывает и термоядерный синтез прекращается. Поэтому возникает проблема удержания плазмы на некотором расстоянии от стенки реактора. С точки зрения дифференциальных уравнений нам требуется найти решение смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона с компактными носителями функций плотности распределения $f^\pm(\cdot,v,t)$ в области Q. Существование таких решений обеспечивается влиянием внешнего магнитного поля определенной структуры, см. [2].

Доказано, что в случае достаточно сильного внешнего магнитного поля, направленного по оси цилиндра Q, решение первой смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона $\{\varphi, f^+, f^-\}$ с компактными по x_1, x_2 носителями функций плотности распределения $f^\pm$ удовлетворяет априорной оценке

$$\max_{0\le t\le T} \||\nabla\varphi(\cdot,t)|\|_{C(\overline{Q})} \le c_1 \max_{\beta=\pm} \|f_0^\beta\|_{C(\overline{Q}\times\mathbb{R}^3)},$$

где $c_1 > 0$ не зависит от f_0^β.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Скубачевский А. Л.* Уравнения Власова–Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле//УМН. 2014. **69**:2. 2014. С.107–148.

2. *Скубачевский А. Л.* Априорная оценка решений смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона с однородным внешним маг-

[1]Российский университет дружбы народов. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (мегагрант соглашение № 075–15–2022–1115).

нитным полем //Дифференциальные уравнения. 2022. **58**:12. С. 1683–1687.

О. В. Солонуха (Москва)
solonukha@yandex.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $Q = (0,2) \times (0,1)$, $\Omega_T = (0,T) \times Q$. Рассмотрим задачу

$$\partial_t u - \sum_{1 \le i \le 2} \partial_i A_i(x,t,Ru,\nabla Ru) + A_0(x,t,Ru,\nabla Ru) = f(x,t), \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in Q), \quad u(x,t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q,\, 0 < t < T), \qquad (2)$$

где $Ru(x,t) = u(x,t) - \gamma_1 u(x_1+1,x_2,t) - \gamma_{-1} u(x_1-1,x_2,t)$.

Пусть $\zeta_{l\cdot}$ — l–я строка матрицы ζ, $\zeta_{\cdot i}$ — i–й столбец ζ; $\gamma_0 = 1$; $h_1 = (0,0)$, $h_2 = (1,0)$. Положим $\mathcal{V} := L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T)$, $1 < p < 2$, $\mathcal{V}^*$ — сопряженное к нему, $W := \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*\}$.

Теорема 1. *Пусть $\gamma_1\gamma_{-1} \ne 1$ и выполнены условия:*

(A1) *условие интегрируемости: для п.в. $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ существуют $c_1 > 0$ и $g_0 \in L_q(Q)$ такие, что*

$$|A_i(x,t,\xi)| \le g_0(x,t) + c_1 \sum_{0 \le j \le n} |\xi_j|^{p-1} \quad (i = 0,\dots,n);$$

(A2) *условие сильной эллиптичности: для всех s, п.в. $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ и всех $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ ($\eta \ne \zeta$ и $\eta_{l0} = \zeta_{l0}$) существует $\Upsilon : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1_+$ ($\Upsilon(y) = \hat{\Upsilon} > 0$ при $y \ne 0$) такая, что*

$$\sum_{\substack{1 \le m,l \le 2 \\ 1 \le i \le 2}} \gamma_{m-l} \left(A_i\left(x+h_l,t,\zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x+h_l,t,\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(\zeta_{mi} - \eta_{mi}\right)$$
$$\ge \sum_{1 \le l \le N(s)} \sum_{1 \le i \le n} \Upsilon(\zeta_{l0})\, |\zeta_{li} - \eta_{li}|^p\,;$$

(A3)*: $A_i(x,t,\xi)$ локально гёльдеровы по ξ_0, $A_0(x,t,\xi)$ локально гёльдеровы по ξ_j с показателем $\dfrac{p-1}{p} < \rho < p-1$:*

$$\left|A_i(x,t,\hat{\xi}) - A_i(x,t,\xi)\right| \le \Psi\Bigg(\sum_{j:\hat{\xi}_j \ne \xi_j} |\hat{\xi}_j|^{p-1-\rho} + \sum_{0 \le k \le n} |\xi_k|^{p-1-\rho}$$
$$+ g_\Psi(x,t)\Bigg) \sum_{j:\hat{\xi}_j \ne \xi_j} |\hat{\xi}_j - \xi_j|^\rho,$$

где $\widehat{\Psi} > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(\Omega_T)$, $q' = p/(p-1-\rho)$.

Тогда для любых $f \in \mathcal{V}^*$ и $\varphi \in L_2(Q)$ существует обобщенное решение $u \in W$ задачи (1)–(2).

Секция II
Теория функций

О. Г. Авсянкин (Ростов–на–Дону)
ogavsyankin@sfedu.ru

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА [1]

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное арифметическое пространство. Группа Гейзенберга — это множество $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, наделенное групповой операцией

$$(z_1, t_1)(z_2, t_2) = (z_1 + z_2, t_1 + t_2 + 2\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z}_2)).$$

Определим на группе $\mathbb{H}_n$ растяжение δ_λ, где $\lambda > 0$, равенством

$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(z, t) = (\lambda z, \lambda^2 t), \quad x = (z, t) \in \mathbb{H}_n.$$

Для любого $x = (z, t) \in \mathbb{H}_n$ положим $\|x\| = \|(z, t)\| = \big(|z|^4 + |t|^2\big)^{1/4}$. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим через $L_{p,\alpha}(\mathbb{H}_n)$ — пространство (классов) измеримых комплекснозначных функций с нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{H}_n} |f(x)|^p \|x\|^\alpha \, dx\Bigg)^{1/p}.$$

Определим на пространстве $L_{p,\alpha}(\mathbb{H}_n)$ оператор K формулой

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{H}_n} k(x, y)\varphi(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{H}_n,$$

где функция $k(x, y)$ измерима и однородна степени $(-2n - 2)$, т. е.

$$k(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda^{-2n-2} k(x, y), \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Получены достаточные условия ограниченности оператора K из пространства $L_{p,\alpha}(\mathbb{H}_n)$ в $L_{q,\beta}(\mathbb{H}_n)$, а также из $L_{p,\alpha}(\mathbb{H}_n)$ в $L_\infty(\mathbb{H}_n)$. Кроме того получена формула, связывающая показатели степенных весов α и β со значениями p и q.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Krantz S. G.* Explorations in harmonic analysis: with applications to complex function theory and the Heisenberg group. Boston: Birkhäuser. 2009. 360 p.

[1] Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, Соглашение Минобрнауки России № 075-02-2023-924.

Г. С. Балашова (Москва)
balashovags@mpei.ru

ВЛОЖЕНИЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Определим весовое пространство Соболева бесконечного порядка

$$W_L^{\infty}\left\{a_k, p_k, q_k, w_k\right\}_{(a,b)} \tag{1}$$

как множество бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ функций $\varphi(x)$, для которых $\varphi^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \ldots,$ и

$$\rho(u(x)) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k \left(\int_a^b \left| \varphi^{(k)}(x) \right|^{p_k} w_k(x)\, dx \right)^{\frac{q_k}{p_k}} < \infty.$$

Здесь $\{a_k\}$, $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ — числовые последовательности, $a_k \geq 0$, $1 < p_k < \infty$, $1 < q_k < \infty$; $\{w_k(x)\}$ — последовательность весовых функций на $[a,b]$. Будем предполагать, что пространства типа (1), рассматриваемые в этой работе, нетривиальны.

Используя неравенство Харди, записанное в дифференциальной форме (см. [1])

$$\left(\int_a^b |\varphi^{(k)}(x)|^{q_k} u_k(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \leq C_k \left(\int\limits_a^b |\varphi^{(k+1)}(x)|^{p_k} v_k(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p_k}} \tag{2}$$

для функции $\varphi(x)$ с $\varphi^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и полученные ранее условия вложения для пространств Соболева бесконечного порядка (см. [2], [3]), устанавливаем условия вложения весовых пространств Соболева бесконечного порядка.

Теорема. *Пусть $\{a_k\}$, $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ — указанные числовые последовательности; $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ — последовательности весовых функций на отрезке $[a,b]$ таких, что для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства (2) и соотношения*

$$b_k \leq a_{k+1}/C_k^{q_k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда имеет место вложение

$$W_L^{\infty}\left\{a_k, p_k, q_{k-1}, u_k(x)\right\}_{(a,b)} \subset W_L^{\infty}\{b_k, q_k, q_k, v_k(x)\}_{(a,b)}.$$

Замечание 1. Аналогичные результаты получены и для пространств W_R^{∞} с $\varphi^{(k)}(b) = 0$ и W_{LR}^{∞} с $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечание 2. Используя неравенство Харди k-го порядка

$$\left(\int_a^b |\varphi(x)|^q u_k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_k \left(\int\limits_a^b |\varphi^{(k)}(x)|^{p_k} v_k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p_k}}$$

с $\varphi(x)$: $\varphi(a) = \varphi'(a) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(a) = 0$, $k > 1$, получаем условия вложения

$$W_L^\infty\{a_k, p_k, q, v_k\}_{(a,b)} \subset \mathcal{L}^q(a,b,u),$$

где $\mathcal{L}^q(a,b,u)$ — весовое пространство Лебега, $u(x)$ — сумма равномерно сходящего на (a,b) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{C_k^q} u_k(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kufner A., Person L.-E.* Integral inequalities with weights. Prague, 2000.

2. *Дубинский Ю. А.* Пределы банаховых пространств. Теоремы вложения. Применения к пространствам Соболева бесконечного порядка // Матем. сб. 1979. Т. 110(152), № 3. С. 428–436.

3. *Балашова Г. С.* О теоремах вложения пространств бесконечно дифференцируемых функций // Матем. заметки. 1984. Т. 35, № 4. С. 505–516.

Б. Б. Беднов (Москва)
noriiii@inbox.ru

О МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВАХ В СТРОГО ВЫПУКЛЫХ НЕ ГЛАДКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — действительное банахово пространство. Множество $M \subset X$ называется чебышёвским, если для каждого $x \in X$ существует и единствен ближайший к x элемент в M.

Непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, в банаховом пространстве X называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ монотонна по τ для любого функционала $f \in \operatorname{ext} S^*$. Множество называется *монотонно линейно связным* (см. [1]), если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве.

Монотонная линейная связность является более слабым свойством, чем выпуклость, и более сильным, чем линейная связность. Каждое выпуклое множество является монотонно линейно связным.

В двумерном нормированном пространстве X_2 чебышёвское множество монотонно линейно связно [2].

Теорема [3] **.** *В строго выпуклом не гладком пространстве X_n, $n \geq 3$, существует чебышёвское не монотонно линейно связное множество.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Алимов А. Р.* Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Математический сборник, 2006. Т. 197, № 9. С. 3–18.

2. *Hetzelt L.* On suns and cosuns in finite dimensional normed real vector spaces // Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1985. Vol. 45, № 1-2. P. 53–68.

3. *Беднов Б. Б.* Конечномерные пространства, в которых класс чебышёвских множеств совпадает с классом замкнутых и монотонно линейно связных множеств // Математические заметки, 2022. Т. 111, № 4, С. 483–493.

Б. Г. Вакулов (Ростов–на–Дону)
bvak@bk.ru

ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НА СФЕРЕ

Хорошо известны дробные интегралы Римана–Лиувилля.
Определение. Дробные интегралы на $[a,b]$ (см. [1.]–[2.]):

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha-1}},\quad I^{\alpha}_{b-}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha-1}}.$$

Справедлива лемма для сфер. свёрток(см. [3.]) с ядром $f(x',\sigma)$, где M_{φ} - среднее с x' средним на высоте τ, определяется как:

$$M_{\varphi}(x',\tau)=\frac{1}{|S_{n-2}|}\cdot\int\limits_{B_{n-2}(0,1)}\frac{\varphi_x(z_+)+\varphi_x(z_-)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi,\quad n\geq 3.\quad (\text{см. [1.]})$$

Лемма. Пусть $\varphi(\sigma)\in C(S_{n-1})$ и $(1-\tau^2)^{(n-3)/2}f(\tau)\in L_1(-1;1)$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{S_{n-1}}\varphi(\sigma)f(x'\sigma)d\sigma=|S_{n-2}|\int\limits_{-1}^{1}M_{\varphi}(x',\tau)(1-\tau^2)^{(n-3)/2}f(\tau)d\tau.$$

По аналогии с отрезком, в работе вводятся новые объекты на сфере, рассматриваются случаи $|x-\sigma|\leq t$ и $|x-\sigma|\geq t$

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{+}\varphi=2^{\frac{5-n-\alpha}{2}}\cdot C\int\limits_t^2 u^{\alpha-1}(4-u^2)^{(n-3)/2}\cdot M_{\varphi}(x',1-\frac{u^2}{2})du,\qquad(1)$$

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{-}\varphi=2^{\frac{5-n-\alpha}{2}}\cdot C\int\limits_0^t u^{\alpha-1}(4-u^2)^{(n-3)/2}\cdot M_{\varphi}(x',1-\frac{u^2}{2})du.\qquad(2)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1.] *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. М.: Изд. Рост. ун. 1984. С. 142–147.

[2.] *Самко С. Г./Килбас А. А./Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. М.: Минск «Наука и техника», 1987, С.173–180.

[3.] *Самко С. Г.* Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу // Изв. вузов Матем., 1983, № 4. С. 28–42.

А. В. Гиль (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

Интегральный оператор с однородным ядром и дополнительным весом в пространстве BMO

Были рассмотрены операторы с однородными степени -1 ядрами с дополнительным весом в пространствах BMO и VMO. Такие операторы имеют многочисленные приложения и хорошо изучены в пространствах суммируемых или гладких функций. В одномерной теории в пространствах $L_p, 1 < p < \infty$, эти классы операторов тесно связаны с операторами свертки (с помощью экспоненциальных замен), а также с сингулярными интегральными операторами (с помощью преобразования Меллина для операторов с однородными степени -1 ядрами). Эти связи приводят к соответствию **оператор** $\Longleftrightarrow$**ядро**$\Longleftrightarrow$**символ**, что позволяет формулировать в терминах символа и его индекса основные свойства операторов, связанные с описанием их спектральных и фредгольмовских свойств. Пространства BMO уже давно возникли в различных вопросах, связанных с интегральными операторами. Именно в их терминах, например, описывается образ дробных интегралов и потенциалов Рисса в так называемом предельном случае теоремы Соболева, когда $\alpha = np$. В терминах принадлежности к BMO описываются классы функций, для которых коммутатор с сингулярным интегральным оператором оказывается компактен и др.

Основным рассмотреным объектом является интегральный оператор с однородным степени -1 ядром

$$Kf(x) = \int_0^{+\infty} g(y)k(x,y)f(y)dy, \qquad x \in (0,+\infty),$$

где ядро $k(x,y)$ однородно степени -1, а $g(y)$ – дополнительная весовая функция, у довлетворяющая условию Гёльдера. Для этого оператора получены достаточные условия на весовую функцию и ядро, при которых интегральный оператор ограничен в пространстве BMO функций ограниченной средней осцилляции и VMO. При исследовании этих оценок была получена вспомогательная лемма о мультипликативности функций из пространств типа BMO. В ходе её доказательства существенно использовалось то, что весовая функция принадлежит пространству Гёльдера, а также использовались оценки средних значений функций из пространства BMO.

Т. С. Мардвилко (Минск)
mardvilko@mail.ru

Сравнение скоростей рациональной аппроксимации четного и нечетного продолжений функций [1]

Пусть $f \in C[0,1]$ и $f(0) = 0$. Будем рассматривать $f^+(x) = f(|x|)$ и $f^-(x) = f(|x|)x$ соответственно четное и нечетное продолжение f на $[-1,1]$. Для $f \in C[a,b]$ введем наилучшее равномерное рациональное приближение

$$R_n(f;[a,b]) = \inf \|f - r\|_{C[a,b]},$$

где инфимум берется по всем рациональным функциям степени не выше n.

В работе [1] изучаются наилучшие равномерные рациональные приближения f^+ и f^-. В частности, показано, что $R_n(f^+;[-1,1])$ могут быть оценены сверху через $R_k(f;[0,1]), k = 0,1,...,n$. А в случае, когда $R_n(f;[0,1])$ имеют степенной порядок стремления к нулю, $R_n(f^+;[-1,1])$ имеет тот же порядок. Теорема 1 утверждает, что при этом $R_n(f^-;[-1,1])$ могут стремиться к нулю сколь угодно медленно.

Теорема 1. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительные убывающие бесконечно малые числовые последовательности, удовлетворяющие условию $a_n = o(b_n)$ при $n \to \infty$. Тогда существует функция $g \in C[0,1]$, $g(0) = 0$, и натуральное число n_1 такие, что*

(i) $R_n(g;[0,1]) \leqslant R_n(g^+;[-1,1]) \leqslant a_n$ *при* $n \geqslant 1$*;*

(ii) $R_n(g^-;[-1,1]) \geqslant b_n$ *при* $n \geqslant n_1$.

Для доказательства теоремы 1 мы использовали конструкцию, аналогичную предложенной Гончаром А. А. [2] для исследования наилучших рациональных приближений функций с изломом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мардвилко Т. С., Пекарский А. А.* Применение действительного пространства Харди–Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций //Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 16–36.

1. *Гончар А. А.* Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения // Матем. сб. 1967. Т 114. № 3. С. 489–503.

[1]Работа выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси "Конвергенция" 2021 – 2025 г.

V. R. Misiuk (Grodno)
misiuk@grsu.by

AN ANALOGUE OF THE INVERSION OF THE SOBOLEV EMBEDDING THEOREM FOR RATIONAL FUNCTIONS OF A GIVEN DEGREE

Let D be the circle $|z| < 1$ in the complex plane. For $0 < p \leqslant \infty$ we denote by $L_p(D)$ the Lebesgue space of complex functions on D with respect to the flat Lebesgue measure with the usual quasi-norm $\|f\|_{L_p(D)}$. Spaces Sobolev $W_p^s(D)$ are well known and quite deeply studied. The following Sobolev embedding theorem is well-known [1]:

$$W_q^1(D) \subset L_p(D),$$

where $2 \leq p < \infty$ and

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}.$$

In this report, we plan to highlight the question that the following analog of the inversion of this theorem is true for rational functions of a given degree.

It should be noted that various aspects of these relations and their applications were previously studied by the author in [2], [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Stein E.* Singular Integrals and Differentiability Propeties of Functions // Princeton Univ. Press, NJ, 1970.

2. *Misiuk V. R.* Refinement of inequalities and theorems of Bernstein type theory of rational approximations with respect to the plane Lebesgue measure // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. 2008. 68 (2). P. 22–31.

3. *Misiuk V. R.* On the inverse theorem of the theory of rational approximations for Bergman spaces // Problems of physics, mathematics and technics. 2010. No. 1(2). P. 34–37.

Б. Н. Хабибуллин (Уфа)
khabib-bulat@mail.ru

ТЕОРЕМА МАЛЬЯВЕНА – РУБЕЛА СЕГОДНЯ[1]

Исключительно в терминах распределений точек Z и W, лежащих на *положительной полуоси,* теорема Мальявена – Рубела начала 1960-х гг. даёт критерий того, что для любой *целой функции экспоненциального типа* (ц.ф.э.т.) $g \not\equiv 0$, обращающейся в нуль на W, существует ц.ф.э.т. $f \not\equiv 0$, обращающаяся в нуль на Z, для которой $|f(iy)| \leqslant |g(iy)|$ при всех вещественных y. В начале 1990-х гг. теорема Мальявена – Рубела была перенесена нами (см. [1; 3.2]) на распределения *комплексных* точек Z и W, отделённые сколь угодно малыми углами от мнимой оси, с некоторыми продвижения в 2020–21 гг. в наших совместных с А. Е. Салимовой работах. Последние наши результаты 2022–23 гг. позволяют снять всякие ограничения на W, а для Z существенно ослабить требования с помощью знаменитых *теорем Бёрлинга – Мальявена о мультипликаторе* и *радиусе полноты* вместе с их развитием в [2], [3]. При этом наряду с классическими *внешними плотностями Бёрлинга – Мальявена, Кахана, Редхеффера* и др. [1; 3.4] для Z возможно использование и гораздо более тонких *тестовых плотностей* на основе [2], [3]. Это дальнейшее развитие получено как в рамках распределений точек Z и W с ц.ф.э.т. f и g, так и для пар субгармонических функций конечного типа при порядке 1 в терминах их распределений масс Рисса.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. 4-е доп. изд. Уфа. РИЦ БашГУ. 192 с. ISBN 978-5-7477-2992-6. https://matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/expkhbn.pdf

2. *Хабибуллин Б. Н., Талипова Г. Р., Хабибуллин Ф. Б.* Подпоследовательности нулей для пространств Бернштейна и полнота систем экспонент в пространствах функций на интервале // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 2. С. 185–215.

3. *Байгускаров Т. Ю., Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н.* Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 2. С. 1–33.

4. *Хабибуллин Б. Н.* Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы // Изв. РАН. Сер. матем. 2023. 61 стр. (принято к печати).

[1]Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00026, https://rscf.ru/project/22-21-00026/ .

Секция III
Дискретная математика, алгебра, геометрия

Л. А. Бекларян (Москва)
lbeklaryan@outlook.com

О ПРОБЛЕМЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ГРУППЕ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Отображение $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *квазисимметрическим*, если оно удовлетворяет условию $M_q^{-1} \leq \frac{q(x+t)-q(x)}{q(x)-q(x-t)} \leq M_q$.

Квазисимметрические отображения являются следами квазиконформных автоморфизмов верхней полуплоскости, нормированные условием $\infty \to \infty$ [1]. Группа, элементы которой являются квазисимметрическими, называется *квазисимметрической.*

Основная теорема ([3],[4]). *Пусть Q — группа гомеоморфизмов прямой. Для существования квазисимметрического гомеоморфизма η такого, чтобы $\eta \circ Q \circ \eta^{-1}$ являлась группой аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы группа Q была квазисимметрической и для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ выполнялось равенство $M_{q^n} = M_q$.*

Ранее в [2], такой результат был доказан при условии, что $M_q = M$ для любых $q \in Q$. Представленный результат является следствием того, что для группы Q квазисимметрических гомеоморфизмов со свойством $M_{q^n} = M_q$ для любых $q \in Q$ и $n \in \mathbb{Z}$ существует метрический инвариант в виде проективно инвариантной меры, которая и определяет гомеоморфизм η. Более того, существует коммутативная нормальная подгруппа G с равномерной константой $M = M_g$ для любых $g \in G$ и такая подгруппа имеет групповую и топологическую сложность исходной группы Q (если Q не циклическая, то и G не циклическая; минимальные множества исходной группы Q и подгруппы G совпадают). Наличие такой подгруппы и гарантирует квазисимметричность гомеоморфизма η.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ahlfors L. V.* Lectures on Quasiconformal Mappings. N.-Y.: D. Van Nostrand, 1966.

2. *Hikkanen A.* The Structure of Certain Quasisymmetric Groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 83, No. 422. P. 1–87.

3. *Бекларян Л. А.* О критерии топологической сопряженности квазисимметрической группы группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$ // Матем. Сб. 2000. Т. 191, №. 6. С. 31–42.

4. *Бекларян Л. А.* О структуре группы, квазисимметрически сопряженной группе аффинных преобразований прямой // Матем. Сб. 2005. Т. 196, №. 10. С. 3–20.

С. М. Гусейн-Заде (Москва)
sabir@mccme.ru

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ АДДИТИВНЫЕ ИНВАРИАНТЫ [1]

Понятие экзотических (упорядоченных) конфигурационных пространств точек на пространстве X было предложено Ю. Барышниковым в [1]. Он получил формулы для (экспоненциальных) производящих рядов эйлеровых характеристик этих пространств. Мы рассматриваем неупорядоченные аналоги этих пространств. Примером такого (простейшего, «не экзотического'» конфигурационного пространства является симметрическая степень $S^kX = X^k/S_k$, где S_k — группа перестановок k элементов. Производящий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \chi(S^kX)t^k$ эйлеровых характеристик симметрических степеней пространства X даётся формулой Макдональда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi(S^kX)t^k = (1-t)^{-\chi(X)}.$$

Формулируется аналог этой формулы для экзотических конфигурационных пространств. Для пространства X, являющегося комплексным квазипроективным множеством, даётся формула для производящих рядов классов этих конфигурационных пространств в кольце Гротендика комплексных квазипроективных множеств. Ответ формулируется в терминах (естественной) степенной структуры над этим кольцом, построенной в [2]. Это даёт формулы для производящих рядов аддитивных инвариантов конфигурационных пространств, таких как многочлен Ходжа-Делиня.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Baryshnikov Yu.* Euler characteristics of exotic configuration spaces // Sém. Lothar. Combin. 2020. v. 84B, Art. 20. P. 1–12.

2. *Gusein-Zade S. M., Luengo I., Melle-Hernández A.* A power structure over the Grothendieck ring of varieties // Math. Res. Lett. 2004. v. 11, no. 1, P. 49–57.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 21-11-00080).

А. И. Зобов (Москва)
zobowai@gmail.com

ЗАДАНИЕ ПОЛНОЦИКЛОВОГО ОБРАТИМОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть G_n — таблица размера $2^n \times\ n$, строки которой суть — вектора размера n над полем $GF(2)$, записанные в следующем порядке:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots,\ G_n = \begin{pmatrix} 0 & G_{n-1} \\ 1 & \bar{G}_{n-1} \end{pmatrix},$$

где $\overline{G}_{n-1}$ — таблица, полученная из таблицы G_{n-1} инвертированием всех элементов. Определим с помощью таблицы $G_n = (\varepsilon_{ij})_{2^n \times\ n}$ отображение $g : GF\,(2)^n\ \to\ GF\,(2)^n$ по правилу:

$$g\,(\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{in}) = \ \left(\varepsilon_{(i+1)1}, \dots, \varepsilon_{(i+1)n}\right).$$

Определение 1. *Пусть* $A = (a_{ij})_{n \times n}$ *матрица размера* $n \times\ n$ *над полем* $\mathbb{R}$. *Тогда нейропреобразованием, порожденным матрицей* A, *назовем вектор-функцию* $f : GF\,(2)^n \to GF\,(2)^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, *где* f_i : $GF\,(2)^n \to\ GF(2)$ *координатные функции, задаваемые каждой координатой* i*-ой строки матрицы* A, *для любого* $i \in\ \overline{1, n}$, *такие что:*

$$f_i\,(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{если } a_{i_1}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + a_{i_n}\left(x_n - \frac{1}{2}\right) > 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Таблица* G_n *задает полный цикл, который может быть задан нейропреобразованием, порожденным матрицей* A_n, *где* A_n *строится по индукции:* $A_1 = (-1)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A_n\ = \begin{pmatrix} n & 1 & -1 \quad \dots \quad (-1)^n \\ -1 & n & 1 \quad \dots \quad (-1)^{n+1} \\ -1 & -1 & \\ -1 & -1 & A_n + A_{n+1}\begin{pmatrix} 2, & \dots, & n+1 \\ 2, & \dots, & n+1 \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

$A_{n+1}\begin{pmatrix} 2, & \dots, & n+1 \\ 2, & \dots, & n+1 \end{pmatrix}$ — *подматрица матрицы* A_{n+1}, *полученная из* A_{n+1} *удалением всех строк, кроме строк с номерами* $2, \dots,\ n+1$, *и всех столбцов, кроме столбцов с номерами* $2, \dots, n+1$.

Теорема 2 *Если A_n — матрица из теоремы 1, то цикл, обратный к π_{A_n} (подстановке, порожденной матрицей A_n), задается нейропреобразованием, порождённым матрицей A_n^T.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зобов А. И., Никонов В. Г.* О возможности применения фрактальных моделей при построении систем защиты информации // Comp. nanotechnol. 2017. № 1. С. 39–49.

2. *Никонов В. Г.* Методы компактной реализации биективных отображений, заданных регулярными системами однотипных булевых функций / *Никонов В. Г., Саранцев А. В.* // Вестник Российского Университета Дружбы Народов. Серия «Прикладная и промышленная математика». 2003. Т.2. — №1. С. 94–105.

П. Н. Сорокин (Москва)
s_p_n_1974@bk.ru

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ Г. ВЕЙЛЯ В КОЛЬЦЕ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ [1]

Пусть $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\, x, y \in \mathbb{Z}\}$ — кольцо гауссовых чисел, $\mathbb{N}z = |z|^2$ — мультипликативная норма в $\mathbb{Z}[i]$. Рассмотрим аналог тригонометрической суммы Г. Вейля [1] следующего вида:

$$S(\alpha_n, ..., \alpha_1) = \sum_{\mathbb{N}\lambda < P} e^{\pi i \mathrm{Sp}(f(\lambda))}, \qquad (1)$$

$f(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + ... + \alpha_1 \lambda$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{Z}[i]$, $n, P \in N$, $P > 1$, $\mathrm{Sp}(\sigma) = 2\mathrm{Re}(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{C}$. Разобьем точки множества $\Pi_n = ([0,1] \times [0,i])^n \subset \mathbb{C}^n$ на 2 класса E_1 и E_2 . Точка $(\alpha_n, ..., \alpha_1) = (x_n + iy_n, ..., x_1 + iy_1) \in E_1$, если

$$x_s = \frac{a_s(x_s)}{b_s(x_s)} + \delta(x_s), \quad y_s = \frac{a_s(y_s)}{b_s(y_s)} + \delta(y_s), \quad s = 1, ..., n,$$

$$a_s(x_s), b_s(x_s), a_s(y_s), b_s(y_s) \in \mathbb{Z},\ (a_s(x_s), b_s(x_s)) = (a_s(y_s), b_s(y_s)) = 1,$$
$$0 \le |a_s(x_s)| < |b_s(x_s)|, \quad 0 \le |a_s(y_s)| < |b_s(y_s)|,$$
$$Q(x) = [b_1(x_1), ..., b_n(x_n)] \le P^{\frac{1}{2n}}, \quad Q(y) = [b_1(y_1), ..., b_n(y_n)] \le P^{\frac{1}{2n}},$$
$$|\delta(x_s)| \le P^{-\frac{s}{2} + \frac{1}{2n}}, \quad |\delta(y_s)| \le P^{-\frac{s}{2} + \frac{1}{2n}}.$$

Все остальные точки $(\alpha_n, ..., \alpha_1) \in \Pi_n$ принадлежат классу E_2.

Теорема 1. *Пусть $n > 11$, $0 < \varepsilon < 1$ — произвольно малое число. Тогда для модуля суммы (1) с коэффициентами многочлена $f(\lambda)$, являющимися точками E_1 и E_2, имеют место следующие оценки:*

$$|S(\alpha_n, ..., \alpha_1)|_{E_1} \le c_1 \cdot P \cdot Q(x)^{-\frac{1}{2n} + \varepsilon} \cdot Q(y)^{-\frac{1}{2n} + \varepsilon} \text{ или}$$

$$|S(\alpha_n, ..., \alpha_1)|_{E_1} \le c_2 \cdot P \cdot Q(x)^{-\frac{1}{2n} + \varepsilon} \cdot Q(y)^{-\frac{1}{2n} + \varepsilon} \cdot \gamma_x^{-\frac{1}{2n}} \cdot \gamma_y^{-\frac{1}{2n}},$$

если $\gamma_x \ge 1$, $\gamma_y \ge 1$, где $\gamma_x = \max\limits_{1 \le j \le n} |\delta_j(x_j)| P^{\frac{1}{2j}}$, $\gamma_y = \max\limits_{1 \le j \le n} |\delta_j(y_j)| P^{\frac{1}{2j}}$,

$$|S(\alpha_n, ..., \alpha_1)|_{E_2} \le c_3 \cdot P^{1-\rho}, \quad \rho^{-1} = 4n^2(2\ln n + \ln\ln n + 2,6),$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. – М.: Наука, 1971.

[1]Работа выполнена в рамках проекта ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН "Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления" FNEF-2022-0007 (Рег. № 1021060909180-7-1.2.1).

Секция IV
Теория вероятностей и стохастические методы

А. Е. Кондратенко, В. Н. Соболев (Москва)
ae_cond@mech.math.msu.su, sobolev_vn@mail.ru

СВОЙСТВО ОТСУТСТВИЯ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ПОСТОЯНСТВО ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ, ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

При рассмотрении в курсе теории вероятностей примеров случайных величин крайне важно наполнять их формальные определения практическим содержанием. Так, например, экспоненциальная (показательная) случайная величина с параметром $\alpha > 0$, определяемая функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ или плотностью $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x \geqslant 0$, обладает следующим свойством, называемым свойством отсутствия последействия: для всех t, $s > 0$ справедливо равенство $\mathrm{P}(\xi > t + s | \xi > s) = \mathrm{P}(\xi > t)$. В рамках теории вероятностей это свойство воспринимается исключительно формальным.

В теории надежности неотрицательная случайная величина рассматривается как время работы механизма до выхода из строя. И в экспоненциальном случае, который “играет исключительную роль в теории надежности” [1], вероятность проработать прибору еще время больше t не зависит от того, сколько прибор уже проработал, что плохо согласуется с интуицией. Для прояснения происходящего рассмотрим функцию надежности $\overline{F}(x) = \mathrm{P}(\xi > x)$ и интенсивность отказов $\lambda(x) = p(x)/\overline{F}(x)$. Если отношение $g'(x)/g(x)$ назвать, когда оно существует, *относительной производной функции* $g(x)$, то становится понятен смысл $\lambda(x)$ — отношение числа отказавших однородных деталей механизма в единицу времени к числу работающих.

Легко видеть, что в случае экспоненциальной случайной величины $\lambda(x) \equiv \alpha$, и это уже вполне согласуется с интуицией. Например, если за первые сутки работы у прибора выходит из строя половина деталей, то за вторые — половина от оставшихся или четверть от исходного числа и так далее. Физическим аналогом является период полураспада радиоактивных элементов.

Таким образом, видится целесообразным при определении экспоненциальной случайной величины в курсе теории вероятностей добавить к изложению вышеупомянутые характеристики теории надежности для практического наполнения формального определения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.

В. Н. Соболев, А. Е. Кондратенко (Москва)
sobolev_vn@mail.ru, ae_cond@mech.math.msu.su

РАЗЛОЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СВЁРТКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Разложения характеристических функций используются как в теоретических, так и в прикладных задачах. В частности, в теории вероятностей они применяются при изучении асимптотических разложений в центральной предельной теореме.

В 1991 г. Х. Правиц предложил [1] часть остатка таких разложений переносить в главную часть. В 2013 г. И. Г. Шевцова (см., например, [2]) применила данную идею при улучшении степенной оценки остаточного члена в формуле Тейлора для произвольной характеристической функции, при этом сохраняя степенной вид зависимости от аргумента, но с более эффективной зависимостью от моментов максимального порядка.

Для случая действительнозначной характеристической функции В. В. Сенатов в работе [3] предложил несколько подобных разложений, которые были обобщены В. Н. Соболевым, А. Е. Кондратенко в [4] и представлены на XXXVI Международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (Петрозаводск, Карелия, Россия, 21–25 июня 2021).

В данной работе на основе перечисленных выше результатов строиться разложение характеристической функции свёртки нескольких вероятностных распределений, в котором ограничение на действительнозначность характеристической функции снято.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Prawitz H.* Noch einige Ungleichungen fur charakteristische Funktionen // Scand. Actuar. J. 1991. № 1. pp. 49–73.

2. *Shevtsova I. G.* On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications // Theory Probab. Appl. 2013. V 57, No. 1. pp. 82-96.

3. *Senatov V. V.* New forms of asymptotic expansions the central limit theorem // Siberian Adv. Math. 2017. V. 27, No. 2. pp. 133-152.

4. *Sobolev V. V., Condratenko A. E.,* Generalization of the result of V.V. Senatov on characteristic functions of convolutions of probability distribution.// Journal of Mathematical Sciences. In print.

Секция V
Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко (Казань)
ggbil2@gmail.com , bilchnat@gmail.com

О ВЛИЯНИИ СОЧЕТАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

В работе, продолжающей исследование [1], представлены результаты [2–4] влияния сочетаний линейных управляющих воздействий на интегральный тепловой поток и суммарную силу ньютоновского трения. Результаты вычислительных экспериментов можно использовать в качестве ограничений в задачах синтеза эффективного управления как на всём участке [5], так и на его фрагментах [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О прямых задачах управления пограничным слоем при гиперзвуковых режимах полёта // XXVI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». 27 мая–3 июня 2018 г. Материалы. Ростов н/Д: Изд-во Фонд науки и образования, 2018. С. 72–73.

2. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния постоянных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2018. 2. С. 5–13.

3. *Bilchenko G. G.(jr), Bilchenko N. G.* On the dependence of the domain of values of functionals of hypersonic aerodynamics on controls // "The Eighth Polyakhov's Reading" 30 January–2 February 2018, Saint-Petersburg, Russia. J. AIP Conf. Proc., 2018, Vol. 1959, 1. [doi: 10.1063/1.5034663]

4. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния сочетаний линейных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2021. 2. С. 5–16.
[doi:10.17308sait.2021.2/3501]

5. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. IV. Классификация задач на всём участке управления // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2018. 3. С. 5–12.

6. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. V. Смешанные задачи на фрагментах участка управления // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2018. 3. С. 13–22.

Н. В. Зеликин (Москва)
n-zl@math.msu.su

ЭКОСИСТЕМЫ БИЗНЕСА, КАТЕГОРНЫЙ ПОДХОД

Образ экономических конгломераций как открытых экосистем, связывающих группы компаний отношениями сотрудничества, стал использоваться как концептуальная модель в последние 20 лет. Обсуждаются системы, образующиеся как определенный экономический организм, динамически стабилизирующий себя в конфликтной среде за счет внутренних механизмов на основе партнерства и сотрудничества [1,2].

Актуальность этой темы обусловлена широкой цифровизацией, на базе которой стремительно развиваются новые бизнесы и целые новые направления. Нарастающей тенденцией становится участие не только компаний-партнеров, но и конечных потребителей в организации и поддержке бизнесов. Конкуренция на глобальных, региональных и национальных рынках, борьба концепций и идей приводят к образованию групп компаний, от согласованности действий которых зависит их общий успех. Бескомпромиссная конкуренция уступает место сотрудничеству, следуя логике развития поверх границ собственности и формальных юридических форм. Экосистемы при категорном подходе описываются суперпозицией ряда видов, составляющих относительно самодостаточную многоуровневую пирамиду. В такой системе важным условием совместного развития является общая ресурсная база – основа всей пирамиды видов. В отличие от примитивной пищевой цепочки, в реальности это взаимовыгодный союз, единое целое как соединение необходимых, часто незаменимых частей. Характерно, что за место в экосистеме происходит борьба, что лишь подчеркивает существенно конкурентную природу явления.

Следует видеть разницу между сравнительно краткими союзами для производства тех или иных товаров или услуг, и более продолжительными слияниями бизнесов. В первом случае это аналог параллельного существования организмов в экологической нише, во втором – объединение видов в экосистеме. Экосистема характеризуется глубоким взаимным проникновением и частичным объединением наследственных кодов в результате взаимной эволюции. В экономике такое наблюдается в рамках отраслей, часто – в создании больших корпораций. Однако наиболее полно бизнес- экосистемы проявляются в межотраслевых и над-отраслевых объединениях [3]. Содержательной частью такого подхода является не только концептуальная целостность описываемого явления, но и богатый инструментарий категорного подхода [4], позволяющий разрабатывать структуру информационной модели, описание взаимодействующих объектов экосистемы и их отношений в виде логических/программных модулей.

Литература:

1. *James F. Moore* — A new ecology of competition. Harvard Business Review 1993 2. *James F. Moore* — Leadership and Strategy in the age of

business ecosystems. Harper Business 2021 3. *Ron Adner* — Winning the right game: How to Disrupt, Defend, and Deliver in a Changing World. The MIT Press, October 5, 2021 4. *Зеликин Н.В.* — Категорный социально-экономический анализ. XXVIII Конференция МАТЕМАТИКА. ЭКОНОМИКА. ОБРАЗОВАНИЕ, 2022

V. L. Litvinov (Samara, SSTU; Moscow, MSU)
vladlitvinov@rambler.ru

APPLICATION OF THE KANTOROVICH–GALERKIN METHOD FOR ANALYSIS OF RESONANT SYSTEMS

The article considers the resonant characteristics of the nonlinear oscillations of the rope with moving borders. The phenomena of resonance and passage through resonance are analyzed. An approximate method has been developed for taking into account the influence of resistance forces and viscoelastic properties on system. This method also allows us to consider a wider class of boundary conditions compared to other approximate methods for solving boundary value problems with moving borders. The article deals with the boundaries by the Kantorovich–Galerkin method phenomena of resonance and stationary passage through resonance are analyzed.

One-dimensional systems with moving boundaries are widely used in engineering [1–3]. The presence of mobile boundaries causes significant difficulties in descriptions of such systems. Exact methods for solving such problems are limited wave equation and relatively simple boundary conditions. From approximate methods, the most effective is the Kantorovich–Galerkin method described in [3]. However, this method can also be used in more complex cases. This method does it is possible to take into account the effect of resistance forces on the system, viscoelastic properties of an oscillating object, as well as weak non-stationarity border conditions. The paper considers the phenomena of stationary resonance and passage through resonance for transverse vibrations of a rope of variable length, taking into account viscoelasticity and damping forces. Performing transformations similar to those given in [5], we obtain an expression for the oscillation amplitude corresponding to the n-th dynamic mode. Expressions describing the phenomenon of stationary state resonance and the phenomenon of passing through resonance.

REFERENCES

1. *Vesnitsky A. I., Potapov A. I.* Transverse oscillations of the ropes of mine hoists // Dynamics systems. Gorky: Gorkovsk. un-ta, 1975. No. 7. S. 84–89.

2. *Litvinov V. L., Anisimov V. N.* Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction direction // Bull. Samara scientific Center Rus'. acad. scientific 2017. V. 19, No. 4. S. 161–165.

3. *Litvinov V. L., Anisimov V. N.* Application of the Kantorovich–Galerkin method for solution of boundary value problems with conditions on moving boundaries // Byull. Rus.acad. Sciences, Solid Mech. 2018. No. 2. P. 70–77.

А. Ю. Переварюха (СПБ ФИЦ РАН, Санкт-Петербург)
madelf@rambler.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИЗИСНЫХ ПОПУЛЯЦИОННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В ИНВАЗИОННЫХ ПРОЦЕССАХ [1]

Обсудим модели специфических экстремальных кризисных процессов популяций вне равновесного состояния популяции со средой на базе систем уравнений с запаздыванием и с пороговыми триггерными функциями. Исследуемые экстремальные биофизические процессы происходят при инвазиях агрессивных чужеродных видов в адаптирующуюся среду. Время адаптации нового биотического окружения и восстановление исчерпанных активным вселенцем ресурсов среды стали важными характеристиками популяционного процесса, которые мы в моделях отразим запаздыванием различного феноменологического типа. Эффекты запаздывания разделены на три типа по биологическому генезису и роли в развитии процессов. Инвазионные процессы проходят этап кризисной динамики $N(t) \to 0 + \epsilon$ и сопровождаются длительными осцилляциями. В результате биосистема получит несколько сценариев динамики кризиса.

Зададим пороговое развитие инвазионного популяционного процесса с кризисом в уравнении с функцией сопротивления среды $\dot{N} = F(N(t-\tau)) - \Psi(N(t-\nu))$. Пороговый эффект реакции агрессивному росту численности вселенца выразим $\ln_K$-регуляцией в функции противодействия $\Psi(N(t-\nu))$ и при $\mathcal{Q} > q, m \geq 2, N(0) < J < \mathcal{K}$ так:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau)}\right) - \mathcal{Q}\frac{N^m(t-\nu)}{(J-N(t))^2} - qN(t). \tag{3}$$

В (1) на начальном этапе идет увеличение численности небольшой группы $N(0) < J$. Далее рост остановлен. Вместо стабилизации $N(t) \to K, N(t_S) < K$ или превышения равновесия K начинается стадия резкого кризиса с возрастанием $F(N^2; J^{-1})$ при $N \to J$ и потенциал роста еще не нивелирован $\ln_K$-регуляцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Переварюха А. Ю.* Моделирование инвазий со стохастически возмущенным запаздыванием // Теория вероятностей и ее применения. Т. 68, № 1. С. 189–190.

2. *Михайлов В. В.* Модель динамики популяции // Информационно-управляющие системы. 2018. № 4. С. 31–38.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00339).

Г. Ю. Ризниченко (Москва)
riznich46@mail.ru

ДИНАМИЧЕСКИЕ И АГЕНТНЫЕ МОДЕЛИ. ОПЫТ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПАНДЕМИИ COVID-19

Эпидемия короновируса Covid-19, начавшаяся в 2020 году, стимулировала разработку математических моделей, призванных прогнозировать как развитие самой эпидемии, так и меры борьбы с этим заболеванием, и предоставила уникальную возможность быстрой проверки правильности результатов моделирования. Благодаря современным информационным технологиям статистика заболеваний по многим городам, странам и всему миру быстро становилась доступной, что позволяло как использовать в моделях имеющиеся данные, так и корректировать модели в соответствии с меняющимися обстоятельствами и проверять правильность прогнозов. За три года эпидемии учеными разных стран были опубликованы десятки тысяч моделей. Только в США разработкой моделей занимались более 80 научных групп. Большинство моделей представляют собой статистические прогнозы, основанные на различных методах регрессионного анализа и методах искусственного интеллекта. Эти модели хорошо проявили себя в краткосрочной перспективе (прогноз на неделю). «Механизменные» модели претендуют на описание длительного развития событий, включая качественные изменения в поведении переменных модели, связанные со сложным нелинейным характером процессов. Эти модели могут быть разделены на две группы.

Первая из них — системно динамические модели, описывающие глобальные характеристики системы: общее число заболевших, пороговые параметры нарастания эпидемии и др. Задача этих моделей – выявить параметры, наиболее чувствительные для системы, изменение которых может остановить или замедлить рост эпидемии. Вторая группа — агентные модели, описывающие структуру взаимодействий и поведение отдельных агентов (людей). Эти модели позволяют учесть демографические и социальные факторы, которые трудно учесть в динамических моделях: индивидуальный возраст агентов, сопутствующие заболевания, состав семей и др. В докладе рассмотрены примеры динамических и агентных моделей. Агентная модель развития эпидемии и ее последствий в Москве (12 млн жителей) включает описание самой болезни covid-19 и сопутствующих ментальных расстройств (большая депрессия и тревожные расстройства), а также влияние на эти патологии общего состояния популяции и предупредительных мер, в том числе карантина.

С.В. Федосов, О.В. Александрова,
Б.И. Булгаков, Н.З. Агафонова (Москва)
fedosovsv@mgsu.ru, aleks_olvl@mail.ru, fakultetst@mail.ru,
natalya-markiv@mail.ru

ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИКИ МАССОПЕРЕНОСА В ПРОЦЕССАХ КОРРОЗИИ БЕТОНА МОРСКИХ СООРУЖЕНИЙ

Решаем задачу – модель задачи – две неограниченные пластины. Решается условием IV-го рода – внутри (вместе контакта) и условием II-го рода – на границах пластин.

При определенных условиях задачи получается решение, содержащее интегралы от функции Фурье. При этом решаются частные задачи, возникает ситуация, когда ряд становится медленно сходящимся, исследуются условия решения этой проблемы.

Дифференциальные уравнения нестационарной диффузии, описывающие динамику полей концентраций переносимого компонента (Ca^{2+}) в каждой из фаз, имеет следующий вид [1,2].

$$\frac{\partial C_1(x,\tau)}{\partial \tau} = k_1 \frac{\partial^2 C_1(x,\tau)}{\partial x^2}; \tau > 0; 0 \le x \le \delta_1 \tag{4}$$

$$\frac{\partial C_2(x,\tau)}{\partial \tau} = k_1 \frac{\partial^2 C_2(x,\tau)}{\partial x^2}; \tau > 0; \delta_1 \le x \le \delta_2 \tag{5}$$

Во-первых, полагаем, что с поверхности конструкции, которая является внутренней поверхностью строительного сооружения, не происходит перенос целевого компонента во внутрь этого сооружения. С математической точки зрения это означает равенство нулю плотности потока массы вещества:

$$-k_1 * \rho_1 \frac{\partial C_1(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \tag{6}$$

Во-вторых, из береговой зоны происходит вынос целевого компонента из грунта в морскую акваторию по принципу внешней массоотдачи. Этот массоперенос определяется уравнением:

$$-k_2 * \rho_2 \frac{\partial C_2(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=\delta_2} = q_H(\tau) \tag{7}$$

$$q_H(\tau) = \beta[\hat{C}_A(\tau) - m_A * C_2(x,\tau)|_{x=\delta_2}] \tag{8}$$

где m_A – константа Генри для системы «грунт-акватория».

Очень важно понимать, что система уравнений (1)-(2) дает единственное решение, будучи дополненной краевыми условиями. К краевым условиям относятся граничные условия, а также начальные условия, определяющие поля концентраций переносимого компонента в момент времени, которые могут представлены зависимостями вида:

$$C_1(x,\tau)|_{\tau=0} = C_{1.0}(x) \tag{9}$$

$$C_2(x,\tau)|_{\tau=0} = C_{2.0}(x) \tag{10}$$

Таким образом, с формально-логистической точки зрения решение краевой задачи (6)-(7) может быть представлено в виде [2,3,4,5,6].

$$C_1(x,\tau) = \frac{1}{\delta_1}\int_0^{\delta_1} C_{1.0}(x) * dx - \frac{1}{\delta_1}\int_0^{\tau}[q_0(\tau^*) - q_1(\tau^*)]d\tau^* +$$
$$\frac{2}{\delta_2}\sum_{m=1}^{\infty}\cos(\pi m\bar{x}) * \exp(-\pi^2 m^2 Fo_1) * \int_0^{\delta_1} C_{1.0}(x^*)\cos(\pi m\xi^*)d\xi^* -$$
$$\frac{2}{\delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\cos(\pi m\bar{x}) * \int_0^{\tau}[q_0(\tau^*) - (-1)^m q_1(\tau^*)] * \exp(-\pi^2 m^2 Fo_1^*)d\tau^* \tag{11}$$

Здесь: x^* - координата в диапазоне [0, x]; τ^* - время в диапазоне $[0,\tau]$; $\bar{x} = \frac{1}{\delta_1}$ – безразмерная координата в диапазоне [0, 1]; $\xi^* = \frac{x^*}{\delta_1}$ – безразмерная координата в диапазоне $[0,\bar{x}]$.

$$C_2(x,\tau) = \frac{1}{\delta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} C_{2.0}(x) * dx - \frac{1}{\delta_2}\int_0^{\tau}[q_A(\tau^*) - q_2(\tau^*)]d\tau^* +$$
$$\frac{2}{\delta_2}\sum_{m=1}^{\infty}\cos(\pi m\bar{\bar{x}}) * \exp(-\pi^2 m^2 Fo_{m.2.}) * \int_{\delta_1}^{\delta_2} C_{2.0}(x^{**})\cos(\pi m\xi^{**})dx^{**} -$$
$$\frac{2}{\delta_2}\sum_{m=1}^{\infty}\cos(\pi m\bar{\bar{x}}) * \int_0^{\tau}[q_2(\tau^*) - (-1)^m q_A(\tau^*)] * \exp[-\pi^2 m^2(Fo_{m.2.} - Fo_{m.2.}^*)]d\tau^* \tag{12}$$

Здесь: $\bar{\bar{x}} = \frac{x}{\delta_2}$; $\xi^{**} = \frac{x^{**}}{\delta_2}$;$Fo_2 = \frac{k_2\tau}{\delta_2^2}$; $Fo_{m.2.}^* = \frac{k_2(\tau-\tau^*)}{\delta_2^2}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Fedosov S, Bulgakov B, Ngo HX, Aleksandrova O, Solovev V.* Theoretical and Experimental Models to Evaluate the Possibility of Corrosion Resistant Concrete for Coastal Offshore Structures. Materials. 2022; 15(13):4697. https://doi.org/10.3390/ma15134697

2. *Федосов С. В.* Методы математической физики в приложениях к проблемам коррозии бетона в жидких агрессивных средах / Федосов С.В., Румянцева В.Е., Красильников И.В. Монография. // Москва, 2021. — 244с. ISBN: 978-5-4323-0399-8

3. *Федосов С. В.* Коррозия строительных материалов: проблемы, пути решения. / Федосов С.В., Степанова В.Ф., Румянцева В.Е., Котлов В.Г.,

Степанов А.Ю., Коновалова В.С. – М.: АСВ, 2022. — 400 с. ISBN 978-5-4323-0435-3

4. *Rudobashta S.P., Kartashov E.M., Zueva G.A* Influence of the topology of a solid body on its mass conductivity. // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2019. T. 92. № 4. pp. 899–906. DOI:10.1007/s10891-019-02001-w

5. *S.P. RudobashtA, M.K. Kosheleva* The determination of mass transfer and mass conductivity coefficients from the kinetic curves. // Textile industry technology. 2015, No 6(360), pp. 175–180. ISSN: 0021-3497

6. *Рудобашта С. П.* Диффузия в химико-технологических процессах : монография / С.П. Рудобашта, Э.М. Карташов. — 2-е изд., переработанное и доп. — Москва : КолосС, 2010. — 478 с.

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru
А. О. Кусая (Ростов-на-Дону)
ariana_1813@mail.ru

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВНУТРИОТРАСЛЕВЫХ ТОРГОВЫХ ПОТОКОВ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН ВО ВЗАИМНОЙ ТОРГОВЛЕ ГОСУДАРСТВ–ЧЛЕНОВ ЕАЭС

В данном исследовании проводится эконометрический анализ внутриотраслевых торговых потоков Республики Казахстан во взаимной торговле государств–членов ЕАЭС с использованием индекса Aggregate Intra-Industry Trade (AddIIT) [1]. С целью получения прогнозных значений стоимостных экспортных и импортных торговых потоков между Казахстаном и государствами–членами ЕАЭС применяется гравитационная модель Х. Линнемана. На основании полученных значений товарооборота РК авторами был осуществлен прогноз на 2022–2023 гг. индекса AddIIT.

Для осуществления прогнозирования индекса AddIIT Республики Казахстан во взаимной торговле государств-членов ЕАЭС, авторами проводится эконометрический анализ зависимости индекса AddIIT (Y_t) от совокупного товарооборота Казахстана во взаимной торговле с государствами–членами ЕАЭС (X_t) по данным за период 2015–2021 гг.

Каждый из рядов Y_t и X_t имеет тренд. Ввиду наличия в каждом из рядов четкой тенденции при построении модели регрессии по временным рядам Y_t и X_t авторами использовался метод отклонения от тренда. По каждому из рядов находились остаточные величины: $dY = Y_t - \hat{Y}_t$; $dX = X_t - \hat{X}_t$.

Применяя к рядам отклонений dY и dX программу «Регрессия» в Excel, предварительно добавляя фактор времени и фиктивную переменную $Z_6 = (0,0,0,0,0,1,0)$, получили прогнозную модель вида (1):

$$dY = 0{,}01 - 0{,}02 \cdot dX - 0{,}005 \cdot t + 0{,}02 \cdot Z_6. \tag{1}$$

Для прогноза на период $t = p$ воспользуемся уравнением в виде:

$$\hat{Y}_{t=p} + 0{,}01 - 0{,}02 \cdot (X_t - \hat{X}_{t=p}) - 0{,}005p + 0{,}02 \cdot Z_6. \tag{2}$$

Значение $\hat{Y}_{t=p}$ получаем как среднее арифметическое прогнозных значений, полученных по модели тренда и рекуррентной формуле экспоненциального сглаживания ряда по формуле (3):

$$S_t = S_{t-1} + 0{,}8 \cdot (Y_t - S_{t-1}). \tag{3}$$

В качестве начального значения экспоненциальной средней возьмем среднее значение данных уровней ряда. Значение $\hat{X}_{t=p}$ вычислим аналогичным способом.

Получим для прогноза на 2022 год равенство

$$\hat{Y}_{t=8} = 0{,}34 + 0{,}01 - 0{,}02 \cdot (28{,}75 - 36{,}63) - 0{,}005 \cdot 8. \tag{4}$$

А для прогноза на 2023 год используем равенство вида

$$\hat{Y}_{t=9} = 0{,}26 + 0{,}01 - 0{,}02 \cdot (33{,}85 - 47{,}92) - 0{,}005 \cdot 9. \tag{5}$$

В равенствах (4) и (5) в качестве X_8 и X_9 соответственно взяты полученные прогнозные значения товарооборота.

Таким образом мы можем наблюдать рост внутриотраслевых торговых потоков Республики Казахстан на 0,08 п. и 0,12 п. в 2022–2023 гг. по сравнению с 2021 годом соответственно [2], что положительно влияет на углубление интеграционных процессов в рамках ЕАЭС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методические подходы к анализу интеграционных процессов в Таможенном союзе и Едином экономическом пространстве.
URL: http://www.eurasiancommission.org/ru/act/ integr_i_makroec/dep_makroec_pol/research/Documents/integr_meths.pdf.

2. Евразийский экономический союз в цифрах: краткий статистический сборник; Евразийская экономическая комиссия. М.: 2022. 189 с. [Электронный ресурс]. URL: https://eec.eaeunion.org/upload/files/dep_stat /econstat/statpub/Brief_Statistics_Yearbook_2022.pdf.

Секция VI
Математическое программирование и теория игр

М. В. Балашов (ИПУ РАН, Москва)
balashov73@mail.ru

НАХОЖДЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ НА ВЫПУКЛЫЙ КОМПАКТ

Пусть $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ — выпуклое компактное подмножество, для которого известна опорная функция $f(p) = s(p, \mathcal{Z}) = \max\limits_{a \in A}(p, a)$, $p \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу нахождения метрической проекции точки $0 \in \mathbb{R}^n$ на $\mathcal{Z}$. На языке опорной функции $f(p)$ эту задачу можно переформулировать в виде

$$\min_{\|p\|=1} = J. \tag{1}$$

Пусть $z_0 \in \mathcal{Z}$ — метрическая проекция нуля на $\mathcal{Z}$. Легко видеть, что решение задачи (1) есть $p_0 = -z_0/\|z_0\|$. При этом $J = (p_0, z_0)$ и $\|z_0\| = -J$.

Пусть $\mathcal{S}_1 = \{p \in \mathbb{R}^n \ : \ \|p\| = 1\}$ и $\mathcal{S} = \{p \in \mathbb{R}^n \ : \ f(p) \le 0\}$. В работе [1] показано, что сильная выпуклость множества $\mathcal{Z}$ необходима и достаточна для липшицевости градиента f из задачи (1), а также дает линейную сходимость итераций $p_1 \in \mathcal{S}$, $p_{k+1} = p_k - \lambda f'(p_k)$ при произвольном выборе $p_1 \in \mathcal{S}$ и достаточно малом $\lambda > 0$ к решению p_0.

В работе [2] получен ряд достаточных условий сходимости указанного градиентного алгоритма без условия сильной выпуклости множества $\mathcal{Z}$.

В настоящем докладе мы планируем уточнить результаты [2]. Также планируется обсудить ряд приложений, где рассматриваемый градиентный метод является эффективным. Это задачи, в которых для множества $\mathcal{Z}$ известна опорная функция и опорное подмножество. К таким задачам относятся задачи с многозначным интегралом или с суммой множеств, например: $\mathcal{Z} = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k B_1(0)$, A_k — $n \times n$ невырожденные матрицы и $B_1(0)$ — единичный шар с центром в нуле.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Балашов М. В.* Некоторые оптимизационные задачи с множеством достижимости линейной управляемой системы // Современные проблемы теории функций и их приложения (Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы). Саратовсий ун-т, Саратов, 2022, 40–43.

2. *Балашов М. В.* Достаточные условия линейной сходимости одного алгоритма для нахождения метрической проекции точки на выпуклый компакт // Матем. заметки, 113:5, 2023, 665–676.

К. Н. Кудрявцев (Челябинск)
kudrkn@gmail.com

ПОСТРОЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ С НЕЧЕТКИМИ ПЛАТЕЖАМИ[1]

В докладе рассматриваются биматричные игры с выигрышами, заданными в виде треугольных нечетких чисел. Для такого класса игр, в качестве решения могут быть использованы T-равновесия по Нэшу, предложенные в [1,2].

Для построения T-равновесия по Нэшу, предлагается конструктивная процедура, основанная, во-первых, на построении «обычной» четкой биматричной игры, ассоциированной с исходной игрой. Во-вторых, на поиске ситуации равновесия по Нэшу в полученной четкой игре.

В свою очередь, для поиска ситуации равновесия по Нэшу четкой биматричной игры используется алгоритм, основанный на построении седловой точки свертки Гермейера [3].

В докладе приводятся результаты численных экспериментов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Kudryavtsev K. N., Stabulit I. S., Ukhobotov V. I.* A bimatrix game with fuzzy payoffs and crisp game // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1987. P. 343–349.

2. *Kudryavtsev K. N., Stabulit I. S., Ukhobotov V. I.* One approach to fuzzy matrix games // CEUR Workshop Proceedings. 2018. Vol. 2098. P. 228–238.

3. *Zhukovskiy V. I., Kudryavtsev K. N.* Pareto-optimal Nash equilibrium: Sufficient conditions and existence in mixed strategies // Automation and Remote Control. 2016. Volume 77, Issue 8, P. 1500–1510.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00539, https://rscf.ru/project/23-21-00539/.

И. С. Стабулит (Челябинск)
irisku76@mail.ru

СИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКОЙ ЦЕЛЬЮ [1]

Рассматривается задача линейного программирования (ЗЛП) с нечеткой целью

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 + \ldots + \tilde{c}_n x_n \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases} \tag{1}$$

в которой коэффициенты $\tilde{c}_i = (c_i^{(1)}, c_i^{(2)}, c_i^{(3)})$ $(i = 1, \ldots, n)$ представляют собой нечеткие числа с треугольной функцией принадлежности.

Следуя подходу, предложенному в [1], сначала задаче (1) сопоставляется ЗЛП с интервальной неопределенностью в целевой функции, которая получается из (1), при каждом фиксированном уровне $\alpha \in (0, 1]$, заменой целевой функции на

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\,. \tag{2}$$

В (2) коэффициент c_i $(i = 1, \ldots, n)$ может принимать любое произвольное значение из $\tilde{c}_i(\alpha)$ – множества α-уровня треугольного нечеткого числа $\tilde{c}_i$.

Затем определяется понятие устойчивого решения задачи (2), после чего вводятся понятия сильного решения задачи (1) и слабого α_0-решения задачи (1).

В докладе будет приведен алгоритм поиска сильного решения задачи (1) и установлены достаточные условия существования указанного решения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ukhobotov V. I., Stabulit I. S., Kudryavtsev K. N.* On decision making under fuzzy information about an uncontrolled factor // Procedia Computer Science. 2019. V. 150. P. 524–531.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740027.

Секция VII
Информационно-коммуникационные технологии в науке, образовании и производстве

Н. Э. Самойленко, Н. В. Ципина, Д. Р. Воронин (Воронеж)
ju.i@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

Оптимальное проектирование современных электронных средств невозможно без разработки комплексных методик моделирования тепловых процессов в конструкциях РЭС, их верификации по результатам натурного эксперимента, а также создания методик обоснованного применения имеющихся и разработки новых математических алгоритмов оптимизационных процедур [1, 2]. Предложена комплексная методика моделирования и оптимального проектирования системы жидкостного охлаждения электронного модуля, достоверность которой подтверждается результатами аналитических расчетов и данными эксперимента. В настоящей работе предлагается моделирование и оптимизация системы охлаждения электронного модуля с использованием современных программных средств моделирования (Creo (Flow Analysis), FLOEFD COMSOL Multiphysics) с последующей верификацией результатов численного моделирования и оптимизации по данным аналитического расчёта и стендовых испытаний.

На основе разработанной 3D-модели электронного модуля реализованы процедуры многовариантного анализа блока лабораторного стенда с помощью современных средств автоматизированного проектирования. Сформирована математическая постановка и выполнены процедуры оптимизации теплового режима, моделирование и оптимизация охлаждающей жидкости, оптимизации топологии блока. оптимизация по материалу корпуса и типу охлаждающей жидкости. Получены графики и таблицы результатов моделирования, на основе которых можно сделать выводы о влиянии конкретного параметра на распределение тепловых потоков.

Список источников

1. Макаров, О. Ю. Комплексное моделирование и оптимизация характеристик в процессе конструкторского проектирования РЭС. [Текст] / О. Ю. Макаров, А. В. Турецкий, Н. В. Ципина, В. А.Шуваев // Вестник ВГТУ. — 2015. — Т. 11. — № 6. — С. 100–104.

2. Макаров, О. Ю. Комплексный подход при моделировании и оптимизации характеристик РЭС в процессе проектирования. [Текст] / О. Ю. Макаров, А. В. Турецкий, Н. В. Ципина, В. А.Шуваев // Радиотехника. — 2016. — № 6. — С. 50–54.

Н. Э. Самойленко, Н. В. Ципина, А. А. Белицкая, К. Д. Ципина
(Воронеж)
ju.i@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИГРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ ПРИ ПОДГОТОВКЕ КОНСТРУКТОРОВ-ТЕХНОЛОГОВ РЭС

Рассматриваются вопросы практического применения игровых технологий обучения с целью повышения мотивации и синтеза оптимальной индивидуальной траектории обучения, что представляет собой актуальную задачу в современных условиях широкого применения дистанционной формы проведения занятий.

В качестве базовой среды традиционно выбирается LMS-система Moodle, которая характеризуется достаточно широким набором средств отслеживания, контроля и повышения мотивации обучаемых (баллы, значки, уровни, доска почета).

В то же время, к сожалению, данная система часто используется не в полной мере своих возможностей, как хранилище учебных материалов, в котором преподаватель в ручном режиме управляет процессом изучения учебной дисциплины, ориентируясь на рейтинго-балльную табличную информацию, вполне корректно представляемую системой. И если интерфейс преподавателя организован вполне корректно, то интерфейс студента не позволяет студенту наглядно оценивать ход выполнения им учебного процесса по конкретной дисциплине.

Поэтому актуальной задачей является применение игровых технологий (элементов геймификации) с применением инструмента значков (бейджи). предоставляемых системой.

В предложенной подсистеме поддержки геймификации преподавателю предоставлены следующие возможности:

- выбор системы значков в рамках созданных библиотек;

- выбор с возможностью коррекции одного из разработанных сценариев игры в соответсвии с количеством и архитектурой элементов курса:

- выбрать или скорректировать текст сообщений, направляемых студенту в каждой ситуативной точке траектории изучения учебной дисциплины.

Секция IX
Потенциал и перспективы экономики России

Д. А. Деткина (Краснодар), А. Д. Мурзин (Ростов-на-Дону)
ddetkina@yandex.ru, admurzin@sfedu.ru

«УМНОЕ» СООБЩЕСТВО КАК СТРАТЕГИЧЕСКИЙ РЕСУРС РАЗВИТИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Несмотря на дестабилизирующие факторы последствий пандемии, санкции, влияющие на социально-экономические показатели развития муниципальных образований, продолжается внедрение информационных технологий в управление городскими территориями, муниципалитеты повышают свои позиции на карте «умных» городов России. Но города становятся «умным» не столько ради рейтингов и развития IT-сферы, сколько ради решения локальных проблем, повышения комфорта, качества жизни граждан, обеспечения их безопасности.

«Умные» города предполагают «умных» жителей, консолидирующихся в «умное» сообщество. Можно предположить, что «умное» сообщество выступает как один из стратегических ресурсов развития муниципального образования, который способен ревитализировать процессы управления социально-экономической системой, защитить от устаревших сценарии развития, создать и воплотить новое будущее для города.

Деятельность «умного» сообщества проявляется не только в управлении инновациями, формировании цифровой экосистемы муниципалитетов. Это сообщество, которое по своей инициативе активно участвует в решении вопросов местного значения, вкладывает в этот процесс весь интеллектуальный ресурс каждого жителя «умного» муниципалитета, несет ответственность за свое развитие наравне с властью и бизнес-структурами, ему присуще неравнодушие к происходящему на территории проживания, оно открыто к доверительному диалогу, почитает свое наследие и культуру. Условиями благоприятной среды для наращивания потенциала «умного» сообщества может являться, например, наличие поощряющейся научно-исследовательской и образовательной деятельности (например, через городские лектории, открытые научные конференции), коммуникативной стратегии (например, через официальные аккаунты органов власти, городские паблики), наличие процесса активизации «умного» сообщества, который опирается на уникальные особенности муниципального образования, всеохватывающее видение будущего развития территории, актуальные запросы локальных стейкхолдеров и выражается в благоприятных эффектах, например, в виде полезных, уникальных решений.

Секция X
Современные проблемы образования

Н. В. Демёхина, А. В. Морозов, А. М. Надолинский
(Ростов-на-Дону)

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МЕТОДОВ ГЕОРАДИОЛОКАЦИОННОГО МОНИТОРИНГА ОБЪЕКТОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ СТУДЕНТАМ СТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Сотрудниками кафедры «Физика» Ростовского государственного университета путей сообщения разработан курс по дисциплине «Физические основы мониторинга объектов железнодорожной инфраструктуры».

В данном курсе, предназначенном для студентов строительных специальностей, содержатся основные сведения о системах мониторинга объектов железнодорожной инфраструктуры. Наиболее детально рассмотрены вопросы георадиолокационного метода мониторинга и диагностики железнодорожной инфраструктуры.

Одной из особенностей преподавания методов георадиолокации студентам технических вузов является необходимость в обширных знаниях в области радиофизики, электроники и программирования. Также важными аспектами являются знание методов обработки данных и математического анализа для работы с современным оборудованием и программным обеспечением. Георадиолокационный метод основан на изучении параметров электромагнитных волн, которые образуются в грунте с помощью импульсного воздействия высокочастотного генератора и принимаются на поверхности после взаимодействия их с грунтовой средой. По параметрам электромагнитных волн определяют геологические характеристики среды: наличие, форму и глубину залегания отражающих границ, вид и состояние грунтов в разрезе и т.п. Для понимания теории метода георадиолокации студентам необходимо иметь хорошие знания в области рассеяния и отражения электромагнитных волн, например, на различных материалах.

В курсе также рассмотрены основные вопросы электродинамики. Физические основы георадиолокации – это уравнения Максвелла и выкладки из них для монохроматического сигнала, распространяющегося в однородной безграничной среде.

Преподавание методов георадиолокации включает лабораторные работы и практические занятия, работу с георадиолокационным оборудованием и анализ полученных данных. Студенты также могут работать в рамках проектов, в которых будут использоваться методы георадиолокации для решения практических задач.

К особенностям преподавания практической части курса можно отнести сложность организации процесса проведения занятий на объектах и полигонах железной дороги. Так как практически все объекты инфраструктуры железнодорожного транспорта относятся к категории особо опасных и технически сложных объектов необходимо обеспечить высокий уровень безопасности студентов во время проведения практических работ. Наиболее перспективными вариантами решения обозначенной проблемы могут быть:

1. создание на базе университета собственного полигона для практических занятий;
2. разработка виртуальных тренажеров VR;
3. разработка программного виртуального тренажера.

К наиболее распространённым задачам, решаемым методом георадиолокации, можно отнести: профилирование границ раздела сред, поиск «инородных» объектов, локализация дефектов и деформаций земляного полотна. По этой причине создание полигона на базе университета должно базироваться на принципах физического моделирования, т.е. необходимо предусматривать создание полномасштабной модели участка железнодорожного пути с некоторым набором искусственных сооружений. К недостаткам данного подхода к учебному процессу можно отнести отсутствие возможности внесения изменений в конструкцию, с целью наработки практических навыков в широком спектре георадиолокационных образов объектов железнодорожной инфраструктуры. По этой причине, виртуальные VR тренажеры и программные приложения, позволяют погрузить обучающихся в процесс производства работ без выхода на реальные объекты и моделировать различные сценарии. Безусловно, для достижения максимального положительного эффекта в освоении дисциплины, целесообразным является комплексное решение для проведения практических занятий. С целью развития кафедры «Физика», сотрудниками Ростовского государственного университета путей сообщения ведется работа в указанных направлениях.

В целом, преподавание методов георадиолокации является довольно сложной задачей, однако понимание этой темы дает студентам уникальные знания и опыт, которые могут быть полезны во многих областях, включая археологию, геологию, строительство, исследования природных ресурсов и многое другое.

С. А. Докучаев, Г. С. Костецкая (Ростов-на-Дону)
galina.kostezkaya@gmail.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СКЕТЧ-ПРЕЗЕНТАЦИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Развитие цифровых технологий привело к огромному количеству вариаций передачи информационного потока. Одно из самых прогрессивных и многогранных направлений – создание интерактивной презентации, дающей возможность наглядного предоставления материала в форме диалога с компьютером [1].

Преподаватель, создающий интерактивную презентацию, сталкивается с тремя основными проблемами:

1) изложить сложный учебный материал в максимально наглядной, доступной и простой для обучающихся форме;

2) акцентировать внимание и улучшить качество восприятия сложных математических определений и теорем;

3) сэкономить время для осознания и осмысления, повысив тем самым продуктивность обучения.

В настоящее время существует множество инновационных приемов передачи учебного материала с помощью символов и образов в видео и графической обработке. В частности, одним из таких способов визуализации образовательного контента является инфографика - графический способ подачи информации, данных и знаний, целью которого является быстро и чётко преподносить сложную информацию [2].

Еще одним эффективным методом активизации учебной и познавательной деятельности обучающихся, формирования и развития их критического и визуального мышления нам представляется создание скетч-презентаций - визуального инструмента, используемого для передачи информации с помощью изображений, символов, диаграмм и коротких текстовых блоков.

К основным преимуществам использования скетч-презентаций в образовательном процессе следует отнести:

1. Улучшение восприятия и запоминания информации: визуальные образы и диаграммы помогают студентам лучше понимать и усваивать сложные понятия, поскольку они представлены в более доступной форме.

2. Повышение мотивации: скетч-презентации могут сделать учебный материал более интересным и привлекательным, что способствует повышению мотивации студентов к обучению.

3. Гибкость и доступность: скетч-презентации могут быть легко адаптированы для любого уровня знаний, а также могут использоваться в различных предметных областях.

Способность упрощать сложные концепции и улучшать восприятие и запоминание материала делает скетч-презентации незаменимым помощником преподавателя при проведении лекционных занятий по математическим дисциплинам в техническом вузе.

Литература

1. Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Светличная Н. О., Колдынская Л. М. Использование интерактивных презентаций в преподавании общенаучных дисциплин. Труды СКФ МТУСИ. Международная научно-практическая конференция СКФ МТУСИ, Ростов-на-Дону. 2020, с. 498–501.

2. Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Светличная Н. О., Колдынская Л. М. Современные средства визуализации учебного контента. Труды СКФ МТУСИ. Международная научно-практическая конференция СКФ МТУСИ, Ростов-на-Дону. 2021, с. 365–367.

Г. А. Зеленков, Е. В. Мазанько (Новороссийск)
mathshell@mail.ru

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВИЗУАЛИЗАЦИИ В СТАТИКЕ И ДИНАМИКЕ

Использование цифровых технологий дали возможность на более высоком уровне проводить лекционные и практические занятия по математике в высшей школе и не только. Причем, тенденция показывать динамику поведения математических объектов и процессов становиться более востребованной. Эти возможности можно использовать, в частности, для доказательства утверждений с визуализацией пошагово и в непрерывной динамике. В работе предлагается нестандартное изложение темы поиска условного экстремума в курсе высшей математики для будущих инженеров, которая является трудной для понимания. Обычно, ограничиваются технической частью поиска условного экстремума для функции двух переменных с одним уравнением связи. Однако, чтобы перейти на общий случай, когда уравнений связи несколько, а целевая функция 3-х и более переменных, нужно, по нашему мнению, донести до обучающихся идеи Лагранжа минуя сложные математические доказательства.

В работе мы использовали статьи и лучшие тексты на эту тему в классических учебниках и монографиях по математическому анализу. Математические объекты в упомянутых источниках интерпретировались в виде схематичных черно-белых рисунков, что в наше время можно считать неприемлемым. В работе мы применили современную цветную визуализацию и с помощью пошаговой и непрерывной динамики показали поведение функции Лагранжа при изменении параметров (множители Лагранжа) для основных случаев: целевая функция 2-х переменных с одним уравнением связи; целевая функция 3-х переменных с одним или двумя уравнениями связи. Этих случаев достаточно, чтобы понимать общий случай для функции переменных больше трех.

Е. А. Киселева, Е. В. Янина (Рязань)
kiseleva-liza@mail.ru

СОВРЕМЕННЫЙ ПОДХОД К МЕЖПРЕДМЕТНЫМ СВЯЗЯМ МАТЕМАТИКИ И МУЗЫКИ КАК К ЭФФЕКТИВОМУ ПЕДАГОГИЧЕСКОМУ СРЕДСТВУ В УСЛОВИЯХ ИНКЛЮЗИВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В современном мире главной задачей каждого педагога является качественное и доступное обучение детей, входящих в группу риска. Изучение математики развивает умение анализировать и делать выводы, учит мыслить логически и абстрактно. Для детей с ограниченными возможностями здоровья развитие этих навыков первостепенно важно.

Исследования показали, что музицирование развивает математическое мышление у детей. Учёные доказали, что прослушивание музыки благотворно воздействует на формирование логических и математических способностей у детей.

Музыка влияет на активизацию сообщения отделов мозга. Музыкальные навыки обязаны правому полушарию, математические — левому. Клетки левого полушария перегружаются,а правого, из-за недостатка пищи, — атрофируются. Необходимо нагружать мозг равномерно.

Посредством игры на музыкальном инструменте развивается мелкая моторика. Тонкая моторика – это движения, в которых участвуют мелкие мышцы пальцев.Специалисты утверждают, что существует тесная непосредственная связь между ней и зонами в головном мозге. Занятия музыкой не самоцель, а средство для формирования необходимых качеств.

Много веков назад исследованию музыки посвящали свои труды величайшие математики: Р. Декарт, Г. Лейбниц, Л. Эйлер.

Во время письменных проверочных работ у меня на уроке звучит классическая музыка, при прослушивании которой уровень кортизола и частота сердечных сокращений уменьшается, поэтому дети чувствуют себя спокойнее.

Также в своей практике я применяю интегрированные уроки по математике и музыке. Подобные уроки повышают интерес к изучению математики, а также мотивируют на более подробное изучение музыкальных основ.

Музыкальное воспитание ребенка как важнейшая составляющая его духовного развития может стать системообразующим фактором в процессе формирования элементарных математических представлений.

Список литературы:

1. Пузанкова, Л. В. Интерактивные упражнения как элемент методики преподавания информатики / Информатика и прикладная математика. — 2018. — № 24. — С. 66–69.

Е. В. Янина, Е. А. Киселева (Рязань)
yekaterina.yanina.83@mail.ru, kiseleva-liza@mail.ru **ОСНОВНЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ ДЕТЕЙ ГРУППЫ РИСКА И ДЕТЕЙ С ОВЗ, СПОСОБСТВУЮЩИЕ НРАВСТВЕННО – ЭСТЕТИЧЕСКОМУ ВОСПИТАНИЮ**

Изменения, происходящие в социальной сфере современного общества, оказывают прямое воздействие на организацию образовательного процесса, нацеленного на детей, имеющих ограниченные возможности здоровья (ОВЗ), что стимулирует педагогов использовать в своей работе более результативные методы и формы педагогического воздействия.

Основоположным фактором формирования личности ребенка с ОВЗ является использование целостной и комплексной системы специального обучения. Получение качественного и доступного образования детьми, входящими в группу риска, является главным фактором его интеграции в нынешний социум. Нравственно-эстетическому воспитанию детей с ОВЗ необходимо уделять особое внимание, так как именно оно влияет на формирование жизненной позиции.

В рамках коррекционной работы мною была разработана программа дополнительного образования «Рязанские свирельки». Эта разработка актуальна для всех типов учащихся. Она основана на методике игры на свирели известного педагога и музыканта – Эдельвены Яковлевны Смеловой. Эта методика зиждется на принципах оздоровления, общения и познания. Предлагаемая технология – это легкость, общедоступность, а также эффективность; это положительные эмоции с первых занятий – «Я – музыкант!».

Возможности различных методов обучения, учебно-производственной, музыкальной деятельности многогранны, они зависят от природы и содержания соответствующего метода, способов их использования, мастерства педагога. Каждый метод активным делает тот, кто его применяет.

Список литературы:

1. Игнатова, М. А. Чудо-свирель Эдельвены Смеловой / М. А. Игнатова. — Текст: непосредственный // Молодой ученый. — 2011. — № 5 (28). — Т. 2. — С. 239–247. — URL: https://moluch.ru/archive/28/3212/ (дата обращения: 12.02.2023).

2. Пузанкова, Л. В. Использование информационно-коммуникационных технологий в обучении детей с ОВЗ / Л. В. Пузанкова, Е. Киселева // Информатика и прикладная математика. – 2021. – № 27. – С. 73–76

Содержание