Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский центр фундаментальной и прикладной математики (МЦФПМ)
Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ (РНОМЦ ЮФУ)
Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ
МОО «Женщины в науке и образовании»
НОУ Учебный центр «Знание»

XXX Международная конференция Математика. Экономика. Образование.

XIV Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения.

27 мая – 3 июня 2024 г.
Пансионат «Метроклуб»

Материалы

http://conf-symp.sfedu.ru, e-mail: conf-symp@mail.ru

УДК 330.4+504+37 1Л4
XXX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XIV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Ростов н/Д, 2024. — 69 с.
ISBN 978-5-6041226-0-0

Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к экономике, экологии, естественным наукам. Исследуются аспекты современного образования, без которых невозможно решение этих проблем. Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Международный симпозиум
Ряды Фурье и их приложения

Ермоленко Г. Ю. (Новороссийск), Мкртычев О. В. (Новороссийск), Степанова М. А.(Самара)

МОДИФИЦИРОВАННОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

ermolenko-g-yu@nb-bstu.ru, mkrtychev-o-v@nb-bstu.ru

Авторы рассматривают модификацию дискретного преобразования Фурье, обеспечивающего более высокую точность интерполяции применяемых в расчётах функций, чем классическое дискретное преобразование. В классическом ДПФ при интерполяции совпадают значения образа со значениями приближаемой функции в узловых точках. Одно из наиболее простых улучшений ДПФ состоит в учёте дифференциальных свойств исходной функции. Для этого, например, достаточно потребовать, чтобы исходная функция и её образ, а также их производные до некоторого порядка P совпадали в узлах интерполяции, которые, вообще говоря, могут быть не равноотстоящими. Выполнение подобного требования обеспечит гарантированно точное значение в узлах не только самой исходной функции, но и производных до порядка P.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы // Н. С. Бахвалов. — М.: Наука. — 632 с.

2. *Ермоленко А. Г., Ермоленко Г. Ю., Степанова М. А.* Модифицированное дискретное преобразование Фурье // Вестник транспорта Поволжья. — 2011. — №3(27) — С.27–30.

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба (Гродно, Беларусь)
pahamatby@gmail.com rovba.ea@gmail.com

О СУММАХ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ [1]

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1,1]$ и интегрируема с весом $(1-x^2)^{-1/2}$. Тогда функция $\hat{f}(x)$, сопряженная к $f(x)$, определяется следующим образом

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \text{v.p.} \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1,\ 1]. \tag{1}$$

В [1] исследованы аппроксимации сопряженной функции (1) с плотностью $f(t)$, имеющей на отрезке $[-1,\ 1]$ степенную особенность, частичными суммами рациональных сопряженных рядов Фурье–Чебышёва с двумя геометрически различными полюсами.

В работе [2] построен сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва на отрезке $[-1,\ 1]$ и исследованы рациональные аппроксимации сопряженной функции (1) с плотностью $(1-x)^{\gamma}, \gamma > 1/2$, в случае произвольного фиксированного количества геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции.

В докладе вводятся суммы Валле Пуссена сопряженного рационального оператора Фурье–Чебышёва с произвольным фиксированным числом геометрически различных полюсов и исследуются аппроксимации сопряженной функции (1) с плотностью, имеющей степенную особенность. Найдены оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых скорость равномерных рациональных приближений является выше соответствующих полиномиальных аналогов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ровба Е. А., Поцейко П. Г.* Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева–Маркова // Изв. вузов. Матем. 2020. № 9. С. 68–84.

2. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Сопряженный рациональный оператор Фурье – Чебышева и его аппроксимационные свойства // Изв. вузов. Матем. 2022. № 3. С. 44–60.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ № 20162269 (Республика Беларусь).

А. Ю. Трынин (Саратов)
tayu@rambler.ru

О СУММИРОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ С ПОМОЩЬЮ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ

Обозначим последовательность действительных чисел $\phi = \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0 \leq \phi_n < \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n} + \phi_n$ при $0 \leq k \leq n - \mathrm{sign}(\phi_n)$, $l_{k,n}(x - \phi_n) = \frac{\sin(n(x-\phi_n)-k\pi)}{n(x-\phi_n)-k\pi}$. Определим оператор

$$AT_n^{\phi}(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-\mathrm{sign}(\phi_n)}\left\{f(x_{k,n}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,n} - f(0)\right\}\times$$

$$\big(l_{k-1,n}(x-\phi_n) + l_{k,n}(x-\phi_n)\big) + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0).$$

Рассмотрим эталонную задачу Штурма-Лиувилля

$$\hat{U}'' + \hat{\lambda}\hat{U} = 0, \hat{U}(0)\cos\alpha + \hat{U}'(0)\sin\alpha = 0, \hat{U}(\pi)\cos\beta + \hat{U}'(\pi)\sin\beta = 0,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Обозначим тригонометрические функции, являющиеся её собственными функциями $\hat{U}_m := \hat{U}_m(q,\alpha,\beta,x)$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ряд Фурье произвольной непрерывной функции можно суммировать и вычислить его коэффициенты таким образом.

Теорема 1. *Пусть $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{\varepsilon} > 0$, $f \in C[0,\pi]$ и функция $j(n)$, принимающая целые значения или бесконечность, удовлетворяет соотношению $\left[n^{2+\varepsilon}\right] \leq j(n) \leq \infty$. Тогда*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{j(n)}\widehat{AT}_{n,m}^{\phi}[f,\eta]\hat{U}_m(q,\alpha,\beta,x). \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C[0,\pi]$. Тогда равномерно для всех $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$*

$$\hat{f}_m = \int_0^{\pi} f(t)\hat{U}_m(q,\alpha,\beta,t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\widehat{AT}_{n,m}^{\phi}[f,\eta].$$

Сходимость в (1) равномерная на $[\sigma_1\tilde{\varepsilon}, \pi - \widetilde{\sigma}_1\tilde{\varepsilon}]$, а функционалы $\widehat{AT}_{n,m}^{\phi}[\cdot,\eta]$ и константы $\sigma_1, \widetilde{\sigma}_1$ определены в [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Trynin A. Yu.* A Summation Method for Trigonometric Fourier Series Based on Sinc-Approximations // Journal of Mathematical Sciences, 2023. Volume 270, pages 842–858.

В. И. Щербаков (Жуковский Московской области)
kafmathan@mail.ru

О ПОТОЧЕЧНОМ ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ ДИНИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМАМ ТИПА ХААРА И УОЛША

Пусть $p_0 = 1$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$ и $m_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$.

В докладе рассматриваются признаки поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам Прайса, которые при $p_n = p$ переходят в системы Крестенсона (или Крестенсона-Леви), а для $p_n \equiv 2$ — в систему Уолша в нумерации Пэли, а также по системам типа Хаара, занумерованными согласно [1], аналогичные признакам сходимости Дини (см., например, [2] и [3] (в [3] показан признак Дини для систем Прайса)). В зависимости от мажорант Ядер Дирихле имеется 6 (шесть) признаков Дини:

1) классический,

2) классический симметричный,

3) V-признак Дини (признак Дини-Виленкина),

4) симметричный V-признак Дини (симметричный признак Дини-Виленкина),

5) S-признак Дини и

6) симметричный S-признак Дини.

Для обобщенных систем Хаара условия на все признаки Дини слабее, чем для систем Прайса и из них (признаков Дини для обобщённых систем Хаара) следует, что в случае ограниченных $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ряд Фурье по обобщённой системе Хаара сходится к самой функции во всякое её точке непрерывности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Щербаков В. И.* Расходимость рядов Фурье по обобщённым системам Хаара в точках непрерывности функции // Изв. вузов, матем., 2016, № 1, С. 49 — 68.

2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды // 1961, М., Наука.

3. *Щербаков В. И.* Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара // Матем. зам., 2017, Т. 101, вып. 3, С. 446 — 473.

Секция I
Дифференциальные уравнения

И. А. Андреева (Санкт-Петербург)
andreeva_ia@spbstu.ru

Методология исследования иерархических семейств полиномиальных динамических систем

На плоскости своих действительных фазовых переменных исследуется класс динамических систем, содержащих в правых частях уравнений полиномиальные формы, рассматриваемые как взаимно простые. Для выявления картин фазовых траекторий проводятся первое и второе преобразования Пуанкаре согласно методу последовательных отображений Пуанкаре. Глобальный класс систем расщепляется на подклассы ряда уровней иерархии в зависимости от числа и вида сомножителей нижайших степеней, получаемых при разложении исходных полиномиальных форм. Проводится классификация всех возможных подклассов систем нижних уровней иерархии и их детальное изучение, для осуществления которого разработан единый план. В процессе реализации этого плана вводится ряд специальных понятий и терминов, таких, как ДЗ-преобразование системы, последовательность корней специальных характеристических полиномов системы, максимальная простая инвариантная ячейка фазового портрета системы, «бездорожная карта» системы; проводится различение понятий топологического и тододинамического типов особых точек. Изучаются как конечные, так и бесконечно удаленные особые точки систем семейства, строятся и классифицируются все топологически различные фазовые портреты динамических систем в круге Пуанкаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреева И. А., Андреев А. Ф.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. III. // Вестник РАЕН. 2019. Том 19. № 2. С. 20–24.

2. *Andreeva I. A., Efimova T. O.* Classes of Dynamic Systems with Various Combinations of Multipliers in Their Reciprocal Polynomial Right Parts. // IOP Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2090.

3. *Andreeva I. A., Efimova T. O.* On the qualitative study of phase portraits for some categories of polynomial dynamic systems. // Studies of Systems, Decision and Control, Vol. 418. Cyber-Physical Systems: Modelling and Industrial Application, pp. 39–50. Springer, 2022.

С. Н. Асхабов (Грозный)
askhabov@yandex.ru

УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ [1]

В вещественных пространствах Лебега $L_p(\mathbb{R})$, $p>1$, с обычной нормой $\|\cdot\|_p$ методом монотонных (в смысле Браудера-Минти) операторов изучаются три различных класса нелинейных уравнений с интегралами дробного порядка (в смысле Римана-Лиувилля).

Пусть функция $F(x,u)$ определена при $x\in\mathbb{R}$, $u\in\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она непрерывна по u и измерима по x. Обозначим через $L^+_{p'}(\mathbb{R})$ множество всех неотрицательных функций из $L_{p'}(\mathbb{R})$, $p'=p/(p-1)$. Сформулируем один из результатов.

Теорема 1. *Пусть $2<p<\infty$ и выполнены условия*
1) $|F(x,u)|\le c(x)+d_1\cdot|t|^{p-1}$, *где* $c\in L^+_{p'}(\mathbb{R})$, $d_1>0$,
2) $F(x,u)$ *не убывает по u почти при каждом фиксированном x.*

Тогда при любых $\lambda>0$ и $f\in L_p(\mathbb{R})$ уравнение

$$u(x)+\lambda\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{F(t,u(t))\,dt}{(x-t)^{2/p}}=f(x)$$

имеет единственное решение $u^*\in L_p(\mathbb{R})$.

Следствие 1. *При любых $\lambda>0$ и $f\in L_4(\mathbb{R})$ уравнение*

$$u(x)+\lambda\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{u^3(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}=f(x)$$

имеет единственное решение $u^*\in L_4(\mathbb{R})$, причем $\|u^*\|_4\le\|f\|_4$.

Следуя [1], где изучен случай конечного отрезка интегрирования, можно исследовать и другие классы уравнений, когда нелинейность находится вне оператора дробного интегрирования и когда оператор дробного интегрирования входит в уравнение нелинейно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения с интегралами дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т. 9, №1. С. 9–14.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ по проекту: Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи (FEGS-2020-0001)

М. В. Балашов (Москва, ИПУ РАН)
balashov73@mail.ru

О ВЫЖИВАНИИ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим задачу выживания для динамической системы. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмножество и

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n, \ t_0 \geq 0, \tag{1}$$

динамическая система. Последнее мы будем понимать в том смысле, что для любого начального условия $x_0 \in \mathcal{M}$ любое её решение существует на луче $t \in [t_0, +\infty)$. Мы будем предполагать измеримость по Лебегу функции $f(\cdot, x)$ при каждом x и непрерывность $f(t, \cdot)$ при каждом t.

Рассмотрим вопрос, при каких условиях решение задачи Коши (1) "выживает" в $\mathcal{M}$, т.е. $x(t) \in \mathcal{M}$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$? Выживание решений — важный раздел негладкого и многозначного анализа, которому посвящён ряд классических монографий [1], [2].

Необходимым и близким к достаточному условию выживания для системы (1) есть выполнение для почти всех $t \geq 0$ включения

$$f(t, x) \in T(\mathcal{M}, x) \qquad \forall x \in \mathcal{M}, \tag{2}$$

где $T(\mathcal{M}, x)$ — конус Булигана множества $\mathcal{M}$ в точке $x \in \mathcal{M}$.

Пусть $v = v(t, x)$ — возмущение в уравнении

$$\dot{x} = f(x) + v + u(x), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{M}, \quad t_0 \geq 0.$$

Будем считать, что функция v измерима по t и липшицева по x и ее значения равномерно ограничены, например $v(t, x) \in \mathcal{V}(x)$.

В докладе будет обсуждаться в некотором смысле «минимальная» позиционная обратная связь $u(x)$, непрерывная или липшицева, которая позволит решению выживать во множестве $\mathcal{M}$ при наличии помехи v. Результаты частично опубликованы в [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Aubin J.-P.* Viability Theory // N.Y.: Springer Science & Business Media. 2009.

2. *Aubin J.-P., Cellina A.* Название тезисов // Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory // Berlin: Springer-Verlag. 1984.

3. *Balashov M. V.* Viability of the solution with a perturbation and feedback control // J. of Convex Analysis. 2024. Vol. 31. No. 1. P. 289–296.

Л. Е. Бритвина, В. В. Игнатенко (Великий Новгород)
lyubov.britvina@novsu.ru

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЁННЫХ СВЁРТОК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ [1]

Злокачественные новообразования относятся к наиболее распространённым заболеваниям. Они характеризуются высокой смертностью, трудноизлечимостью, требуют персонализированного подхода к лечению. Существует около двухсот различных видов онкологических заболеваний, которые могут поражать организм человека. Одно из них, рак легкого, является крайне агрессивным сложным заболеванием, с быстрым ростом, ранним появлением гематогенных метастазов, частым метастатическим поражением головного мозга и развитием жизнеугрожающих осложнений.

В настоящее временя клиницистами и онкологами накоплен огромный материал наблюдений. На основе анализа этих эмпирических данных строятся различные математические модели, с помощью которых осуществляется попытка описания полного цикла болезни, в том числе, с учётом различных факторов, стимулирующие данную патологию.

С математической точки зрения огромную роль в подобных задачах моделирования играет уравнение диффузии, так как большинство процессов имеет именно диффузионный характер. В докладе рассматривается подход к решению уравнения диффузии методом интегральных преобразований на основе введения понятия обобщённой свёртки.

Вводится само понятие обобщённой свёртки, приводятся примеры обобщённых свёрток преобразования Бесселя, обсуждаются условия их существования. На основе данного понятия даётся общий подход к решению уравнений методом интегральных преобразований. После чего описываются особенности применения данного подхода для решения уравнения диффузии при различных начальных условиях. Рассматриваются задачи, в которых присутствует внешнее воздействие.

А. В. Буробин (Обнинск)
burobin_av@mail.ru

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В работе [1] была поставлена задача Коши для линейного и нелинейного уравнений дробного порядка с производной Римана-Лиувилля [2],

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по программе создания и развития центра мирового уровня «Цифровой биодизайн и персонализированное здравоохранение» в рамках проекта № 075-15-2022-306.

представлены условия её однозначной разрешимости. Подобные результаты могут быть получены и для систем таких уравнений.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$D_{0+}^{\gamma_i} f_i = a_{i1}(x)f_1 + \cdots + a_{in}(x)f_n + F_i(x) \pmod{C_I^{(-\gamma_i)}([0,1])} \qquad (1)$$

при $\gamma_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$. Здесь $C_I^{(-\gamma_i)}([0,1])$ — одномерные подпространства пространств $C^{(-\gamma_i)}([0,1])$, отвечающие за примыкание решений системы к начальным данным, определяемым условиями Коши

$$f_i(0) = f_{i0}, i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Теорема 1. *При непрерывных на* $[0,1]$ *функциях* $a_{ij}(x)$ *и* $F_i(x)$, $i,j = \overline{1,n}$, *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение с компонентами* $f_i \in C^{(0)}([0,1])$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть теперь рассматривается более общая система

$$D_{0+}^{\gamma_i} f_i = F_i(x, f_1, \ldots, f_n) \pmod{C_I^{(-\gamma_i)}([0,l])}, \qquad (3)$$

где, как и прежде, $\gamma_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$, а все функции F_i определены в некоторой области $G \subset R^{n+1}$.

Теорема 2. *Пусть точка* $(0, f_{10}, \ldots, f_{n0})$ *принадлежит* G *вместе со своей окрестностью, в которой функции* F_i, $i = \overline{1,n}$, *непрерывны и удовлетворяют по* $f_1, \ldots, f_n$ *равномерному условию Липшица. Тогда при достаточно малом* l *задача Коши (3), (2) имеет единственное решение с компонентами* $f_i \in C^{(0)}([0,l])$, $i = \overline{1,n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буробин А. В.* Задача Коши для уравнений дробного порядка // Тр. матем.центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2023. Т. 66. С. 58–59.

2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

А. Л. Джабраилов (Грозный)
ahmed_0065@mail.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ПОРОЖДЕННЫМИ ТОЧКАМИ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ [1]

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$y' = \Phi(x, y)\, y + f(x, y) \tag{1}$$

в предположении, что функции $\Phi(x, y), f(x, y)$ относительно точек области $D : \{x \in [a, b], |y| \leq d\}$, d — данное число, обладают следующими свойствами: функция $\Phi(x, y)$ непрерывна по x на интервалах $[a, x_0), (x_0, b]$ и по y на отрезке $[-d, d]$, но при $x = x_0$ обладает сильной сингулярностью [1].

Функция $f(x, y)$ непрерывна по своим аргументам в области D и выполняется неравенство

$$|f(x, y)| \leq \psi(x), \tag{2}$$

где функция $\psi(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\max\left\{\int\limits_a^{x_0} \psi(s)ds, \int\limits_{x_0}^{b} \psi(s)ds\right\} \leq \frac{d}{2}. \tag{3}$$

Для уравнения (1) зададим граничные условия

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \tag{4}$$

с данными числами y_a, y_b, удовлетворяющими неравенствам

$$|y_a| \leq \frac{d}{2}, \quad |y_b| \leq \frac{d}{2}. \tag{5}$$

Теорема 1. *При выполнении условий (2), (3), (5) задача (1), (4) имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее еще и условию*

$$y(x_0) = 0. \tag{6}$$

ЛИТЕРАТУРА

2. *Кигуридзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Издательство тбилисского университета, 1975. 352 с.

[1] Работа выполнена в рамках гос.задания Минобрнауки РФ (FEGS-2020-0001).

Ермоленко Г. Ю. (Новороссийск)

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ

ermolenko-g-yu@nb-bstu.ru

В данной работе излагается метод решения краевых задач математики и механики – метод опорных функций. Идея метода излагается на примере решения задачи Коши для ОДУ, задачи Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения и задачи теории упругости для тела произвольной формы, изготовленного из анизотропного материала. Показано, что метод опорных функций можно применять везде, где решение задачи выражается в виде интегрального оператора. Ядро этого оператора может быть точно, либо, в крайнем случае, аналитически приближенно найдено методом опорных функций.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ермоленко Г. Ю.* Метод опорных функций для решения задач математики и механики // Вестник СамГТУ. Сер. «Физ.-мат. науки». 2004. Вып. 26. С. 126–127.

2. *Ермоленко Г. Ю.* Напряженно-деформированное состояние упругих и вязкоупругих конечных тел произвольной формы при статических и динамических нагружениях. Самара: СГАУ, 2001, 149 стр.

М. А. Кузнецова (Саратов)
kuznetsovama@sgu.ru

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ [1]

Изучается система дифференциальных уравнений при $x \geq 0$:

$$\mathbf{y}' = \big(\lambda F(x) + A(x) + C(x,\lambda)\big)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = [y_j(x)]_{j=1}^n, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}_0$ — спектральный параметр, и $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Матрицы F, A и C порядка n удовлетворяют следующим условиям:

1. $F(x) = \rho(x)B$, где $\rho \in L[0,T)$ для любого $T > 0$, $\rho(x) > 0$ a.e., и $B = \mathrm{diag}\{b_j\}_{j=1}^n$ с постоянными $b_j \in \mathbb{C}$.
2. $A(x) = [a_{jk}(x)]_{j,k=1}^n$, где $a_{jk} \in L[0,\infty)$, $j,k = \overline{1,n}$.
3. $C(x,\lambda) = [c_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1}^n$, где элементы $c_{jk}(x,\lambda)$ являются голоморфными отображениями $\lambda \in \mathbb{C}_0$ в $L[0,\infty)$, при этом

$$\|C(\cdot,\lambda)\|_{L[0,\infty)} := \max_{j,k=\overline{1,n}} \|c_{jk}(\cdot,\lambda)\|_{L[0,\infty)} \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

Получены наборы решений системы (1) с экспоненциальными асимптотиками и свойствами аналитичности по спектральному параметру (см. [1]). Наборы решений с данными свойствами являются важным инструментом при изучении спектральных свойств операторов высшего порядка с коэффициентами-распределениями.

Случай суммируемых коэффициентов A является существенно более сложным, чем случай абсолютно непрерывных коэффициентов. Асимптотики решений систем с суммируемыми коэффициентами были получены в более ранних работах (см. [2] и ссылки в ней), но только для систем на конечном интервале. Системы на полуоси имеют иную специфику, касающуюся не только методов доказательств, но и самих формулировок результатов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Kuznetsova M. A.* On Solutions of Systems of Differential Equations on Half-Line with Summable Coefficients, arXiv:2405.05009.

2. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями, Матем. сб., 211:11 (2020), 129–166.

[1]Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/).

A. L. Skubachevskii (Moscow)
alskubachevskii@yandex.ru

GLOBAL CLASSICAL SOLUTIONS OF VLASOV-POISSON SYSTEM FOR TWO-COMPONENT PLASMA [1]

We consider the second mixed problem for the Vlasov–Poisson system in a half-space. This problem models the kinetics of high temperature plasma in a fusion reactor. If plasma reaches a boundary of the domain, it can lead to the destruction of the reactor. Therefore we study solutions of the above mentioned mixed problem such that the supports of density distribution functions are located strictly inside the domain. For this purpose we use an external magnetic field. It will be obtained sufficient conditions for external magnetic field, which provide existence of global classical solutions having supports of density distribution functions inside the domain [1]

B I B L I O G R A P H Y

1. *A. L. Skubachevskii* On the Existence of Global Solutions for the Vlasov–Poisson System in a Half-space and Plasma Confinement // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, No. 2., pp. 280–292.

[1]Sponsored by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, No. 075-15-2022-1115).

О. В. Солонуха (Москва)
solonukha@yandex.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С p–ЛАПЛАСИАНОМ И СИММЕТРИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ СДВИГОВ[1]

Рассмотрены условия, при которых дифференциально–разностный оператор с p–лапласианом удовлетворяет условию сильной эллиптичности, т.е. является сильно монотонным.

Пример. Пусть $Q = (0, 2) \times G$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область, $\partial G \in C^\infty$, $p = \dfrac{m+1}{m}$, m — четное число. Рассмотрим задачу

$$-\sum_{1\le i\le n} \partial_i \left(\operatorname{sign}(\partial_i Ru)\, |\partial_i Ru|^{p-1}\right) = f(x), \tag{1}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q), \tag{2}$$

где

$$Ru(x) = u(x) - \gamma u(x_1 + 1, x') - \gamma u(x_1 - 1, x'),$$

$x' = (x_2, \ldots, x_n)$. Если $|\gamma| < 1$, то существует и единственно обобщенное решение задачи (1)–(2) $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$.

[1]Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

Секция II
Теория функций

О. Г. Авсянкин (Ростов–на–Дону)
ogavsyankin@sfedu.ru

КАНОНИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ И ПОРОЖДАЕМЫЕ ИМИ БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ [1]

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям:
1° $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y)$ для всех $\alpha > 0$;
2° $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y)$ для всех $\omega \in SO(n)$;
3° $|k(e_1,y)||y|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, где $e_1 = (1,0,\ldots,0)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, содержащую все операторы вида $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Банахова алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна и не содержит компактных операторов, кроме нулевого.

Каждому оператору $A \in \mathfrak{A}$ ставится в соответствие некоторая функция $\sigma_A(m,\xi) \in C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})$, где $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ — компактификация локально компактного пространства $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой. Функцию $\sigma_A(m,\xi)$ назовем *символом* оператора A. Доказывается, что пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, снабженное топологией Гельфанда, гомеоморфно компакту $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Тогда равносильны три условия:*
1) оператор A нетеров в $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$,
2) оператор A обратим в $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$,
3) символ оператора A удовлетворяет условию

$$\sigma_A(m,\xi) \neq 0 \quad \forall (m,\xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}.$$

Также рассматривается расширение алгебры $\mathfrak{A}$ посредством присоединения всех операторов мультипликативного сдвига.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мёрфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997. 336 с.

[1]Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, Соглашение Минобрнауки России № 075-02-2024-1427.

А. Б. Бабаев (Ростов-на-Дону)
mmcs.sfedu.ru

Шкала анизотропных пространств Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости

Пусть $\varkappa \in (0,\infty)^n$ и $|x|_\varkappa$ — вектор анизотропности и анизотропное расстояние соответственно (см. напр. [1]), $s(x)$ — средний переменный показатель гладкости, для которого выполняется условие логарифмической непрерывности (см. напр. [2]), $\delta_h^k(f)$ — конечная разность k-го порядка функции f. Нормы

$$\|f\|_{C_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|_\varkappa^{s(x)}},\ s(x) \ge s_- > 0,$$

и

$$\|f\|_{\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left\|2^{js(x)}\lambda_j(D)f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

(где функции $\lambda_j(\xi)$ задают анизотропный аналог разбиения единицы Литлвуда-Пэли) определяют анизотропные пространства $C_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ соответственно.

Теорема 1. *Если $s(x) \ge s_- > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, то нормы $\|\cdot\|_{C_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ и $\|\cdot\|_{\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ эквивалентны и, следовательно, пространства $C_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ совпадают (с точностью до меры нуль).*

Анизотропный класс символов $a \in S_\varkappa^m$ среднего порядка $m \in \mathbb{R}$ определяется условием

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|_\varkappa)^{m-\beta\cdot\varkappa}.$$

Теорема 2. *Существует псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_\varkappa^m$, являющийся топологическим изоморфизмом из $\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$, если вектор анизотропности состоит из рациональных компонент, $x \in \mathbb{R}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farkas W.* Atomic and sybatomic decompositions in anisotropic function spaces // Mathematische Nachrichten, 2000, vol. 209, iss. 1, pp. 83–113.

2. *Кряквин В. Д.* Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера-Зигмунда переменного порядка // Сиб. мат. жур. 2014. Т. 55, № 6. С. 1315–1327.

А. В. Гиль (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

Некоторые свойства функций из пространств BMO в R^n.

Пространства BMO уже давно возникли в различных вопросах, связанных с интегральными операторами. Именно в их терминах, например, описывается образ дробных интегралов и потенциалов Рисса в так называемом предельном случае теоремы Соболева, когда $\alpha = np$. В терминах принадлежности к BMO описываются классы функций, для которых коммутатор с сингулярным интегральным оператором оказывается компактен и др.

Были рассмотрены условия принадлежности функций к пространствам BMO и VMO на R^n. Получено следующее необходимое условие принадлежности BMO.

Теорема. *Пусть $f(x) \in BMO(\mathbf{R^n})$. Тогда необходимо*

$$S = \int_{\mathbf{R^n}} \frac{|f(t)|^p}{(1+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt < \infty, \quad \text{для любого} \quad 1 \le p < \infty.$$

Возможно дальнейшее ослабление данного необходимого условия.

Теорема. *Пусть $f(x) \in BMO(\mathbf{R^n})$ и $1 \le p < \infty$. Тогда*

$$S = \int_{\mathbf{R^n}} \frac{|f(t)|^p}{(1+|t|)^n (1+\log_2(1+|t|))^{p+1+\varepsilon}} dt < \infty, \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0.$$

Непосредственно из доказанных теорем можно сделать вывод о не принадлежности к пространству $BMO(\mathbf{R^n})$ некоторых функций.

Примеры.

1) Функция $f(x) = |x|^\delta, \delta > 0$ не принадлежит к пространству $BMO(\mathbf{R^n})$ при любом $\delta > 0$.

2) Функция $f(x) = |\ln|x||^\delta, \delta > 1$ не принадлежит к пространству $BMO(\mathbf{R^n})$ при любом $\delta > 1$.

Используя тот факт, что $f(x) \in BMO$ влечёт $|f(x)| \in BMO$, можно дать следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $f(x) \in BMO(\mathbf{R^n})$ и $r > 0$, $|B_0|$ -объем единичного шара в $\mathbf{R^n}$. Тогда*

$$\frac{1}{r^n} \int_{|t|<r} |f(t)| dt \le c_n \big(\ln 2 + |\ln r|\big) \|f\|_{BMO}, \quad c_n = \frac{2^n}{\ln 2} |B_0|.$$

Данная оценка точна при $r \to 0$ и $r \to \infty$ и достигается на функции $f(x) = \ln|x| \in BMO(\mathbf{R^n})$.

Также были рассмотрены средние значения функций и получена их оценка в $BMO(\mathbf{R^n})$.

Теорема. *Пусть $f(x) \in BMO(\mathbf{R^n})$ и $I = B(a,r)$ - шар в $\mathbf{R^n}$. Тогда*

$$|f_I| \le c\|f\|_{BMO}, \quad \text{где} \quad c = 16 + \frac{2n|\ln r|}{\ln 2} + 4n\log_2(2+|a|). \qquad (1)$$

З а м е ч а н и е. *В частности, если* $B(A, R)$ *некоторый шар в* $\mathbf{R^n}$*, где* $A \in \mathbf{R^n}$ *и* $R < \infty$ *- фиксированные, а* $I = B(a, r)$ *- шар, вложенный в* $B(A, R)$ *и функция* $f(x) \in BMO(B(A, R))$*. Тогда вместо (1) будет* $|f_I| \leq (c + d|\ln r|)\|f\|_{BMO(B(A,R))}$.

Из этой теоремы выводится следующая лемма.

Л е м м а. *Пусть* $f(x) \in BMO(\mathbf{R^n})$*,* $p \geq 1$ *и* $I = B(a, r)$ *- шар в* $\mathbf{R^n}$*. Тогда* $(|f|^p)_I \leq c^p \|f\|^p_{BMO}$, $c = \mathbf{C_p} + 16 + \frac{2n|\ln r|}{\ln 2} + 4n \log_2(2 + |a|)$.

Далее приводятся еще несколько свойств модулей функций из $\mathrm{BMO}(\mathbf{R^n})$.

Т е о р е м а. *Пусть* $f(r)$ *является вещественной непрерывной и строго монотонной на* $\mathbf{R^1_+}$ *функцией и принадлежит* $BMO(\mathbf{R^1_+})$ $(VMO(\mathbf{R^1_+}))$*. Тогда функция* $f(|x|)$ *принадлежит* $BMO(\mathbf{R^n})$ $(VMO(\mathbf{R^n}))$.

П р и м е р. *Функция* $\ln|x|$ *принадлежит* $BMO(\mathbf{R^n})$*, а функция* $\ln(1 + |x|)$ *принадлежит* $VMO(\mathbf{R^n})$.

Л е м м а. *Если* $f(x) \in BMO(\mathbf{R^n})$ $(VMO(\mathbf{R^n}))$*, то* $g(x) = |f(x)|^\delta \in BMO(\mathbf{R^n})$ $(\mathrm{VMO}(\mathbf{R^n}))$*,* $0 < \delta \leq 1$*. Обратное, вообще говоря, неверно.*

П р и м е р. *Если* $f(x) = |\ln|x||^\alpha$*, то* $f(x) \in BMO$ *при* $0 < \alpha \leq 1$ *и* $f(x) \notin BMO$ *при* $\alpha > 1$.

С. В. Подклетнова (Самара)
podkletnova.sv@ssau.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ

Для функции

$$F_1\left(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y\right)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^m y^n \ (|x|<1,\ |y|<1)$$

справедливы интегральные представления:

$$F_1\left(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y\right)=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\beta',\gamma-\beta'\right)}\int\limits_0^1 t^{\beta'-1}(1-t)^{\gamma-\beta'-1}(1-ty)^{-\alpha}\times$$
$$\times F\left(\alpha,\beta;\gamma-\beta';\frac{(1-t)\,x}{1-ty}\right)dt,\ (\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\beta'>0)\,;$$
$$F_1\left(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y\right)=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\beta,\gamma-\beta\right)}\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\times$$
$$\times F\left(\alpha,\beta';\gamma-\beta;\frac{(1-t)\,y}{1-tx}\right)dt,\ (\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\beta>0)\,;$$
$$F_1\left(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y\right)=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\alpha,\gamma-\alpha\right)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-ty)^{-\beta'}\times$$
$$\times(1-tx)^{-\beta}dt,(\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0)\,.$$

Аналогичные интегральные представления были найдены для функций

$$F_2\left(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m\left(\beta'\right)_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!}x^m y^n,\ |x|+|y|<1;$$
$$F_3\left(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m\left(\alpha'\right)_n(\beta)_m\left(\beta'\right)_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^m y^n,\ |x|<1,\ |y|<1;$$
$$F_4\left(\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!}x^m y^n,\ |\sqrt{x}|+\left|\sqrt{y}\right|<1.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко, Т. М. Оснач (Гомель)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by, osnach@gsu.by

О СУЩЕСТВОВАНИИ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ–ЧЕБЫШЁВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ [1]

Рассмотрим ряд Фурье $f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l U_l(x)$ по многочленам Чебышёва второго рода $U_n(x) = \sin(n \arccos x)/\sqrt{1-x^2}$.

Если алгебраические многочлены Q_m, P_n, степени которых не превосходят соответственно m и n, удовлетворяют условию

$$(Q_m f - P_n)(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{b}_l \, U_l(x),$$

то рациональную дробь

$$\pi_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \tag{1}$$

будем называть *линейной аппроксимацией Паде–Чебышёва второго рода* для пары индексов (n, m) и ряда f.

Нелинейной аппроксимацией Паде–Чебышёва второго рода для пары индексов (n, m) и ряда f будем называть рациональную дробь $\widehat{\pi}_{n,m}(x)$ вида (1), для которой

$$f(x) - \widehat{\pi}_{n,m}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \widehat{a}_l \, U_l(x).$$

Аналогично определяются линейные и нелинейные аппроксимации Паде–Чебышёва для рядов Фурье по многочленам Чебышёва первого рода (см [1]). В докладе получены достаточные условия, при которых существуют указанные аппроксимации как первого, так и второго рода. В частности, получено ещё одно доказательство хорошо известной теоремы С.П. Суетина (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суетин С. П.* О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций// Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 290–303.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

В. В. Штепин (Москва) , Т. В. Штепина (Москва)
shtepin.vv@phystech.edu , t.v.shtepina@mtuci.ru
Модель представлений основной серии группы Лоренца в функциях на пространстве Лобачевского

Моделью унитарных представлений основной серии группы Лоренца называется такое представление G, в котором каждое из них содержится в точности один раз. Для классических простых групп Ли основные серии унитарных представлений были описаны в 1950 году И.М. Гельфандом и М.А. Наймарком [1]. Чуть позже [2] Н.Я. Виленкин реализовал представления основной серии группы Лоренца $G = SO_0(3,1)$ в функциях на верхней поле светового конуса, имеющих степень однородности $\sigma = -1 + i\rho$, где $\rho \in (0; +\infty)$.

Мы строим модель унитарных представлений основной серии G в функциях с конечным средним на пространстве Лобачевского $S_H = \{x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid [x,x] = 1\}$. Пусть $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — углы Эйлера точки $x \in S_H$, $d\xi = \operatorname{sh}^2\theta_3 \sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$ — инвариантная мера на S_H. Пусть $T \geqslant 0$ и $S_H(T) = \big\{x(\theta) \in S_H \mid 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \theta_2 \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta_3 \leqslant T\big\}$.

Превратим пространство $L^1_{loc}(S_H, d\xi)$в полуевклидово, введя форму:

$$(f,g) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{S_H(T)} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\xi(\theta)$$

Значение $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ назовем средним по пространству Лобачевского. Пусть $V = \{f \in L^1_{loc}(S_H, d\xi) \mid \|f\| < \infty\}$ и V_0 — подпространство функций с нулевым средним.

Теорема 1. а) V/V_0 — унитарное пространство относительно $(\cdot,\cdot)$, в котором квазирегулярное представление группы Лоренца унитарно;

б) в V/V_0 содержится модель представлений основной серии группы Лоренца;

в) модель представлений основной серии является прямым интегралом взаимно ортогональных неприводимых подпространств G, отвечающих попарно различным значениям параметра $\rho \in (0, +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Унитарные представления классических групп // Труд мат. инст. им Стеклова, 1950. № 36, С. 1–288.

2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции, связанные с представлениями класса 1 группы движений пространств постоянной кривизны // Труды Моск. мат. общества. 1963. № 12. С. 85–257.

Секция III
Дискретная математика, алгебра, геометрия

Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω

С. М. Гусейн-Заде, (Москва, МГУ им. М. В Ломоносова)

Вещественные и другие аналоги рядов Пуанкаре нормирований

Пример нормирования на пространстве ростков функций двух переменных — порядок функции на фиксированной кривой C. Его ряд Пуанкаре — производящий ряд размерностей факторпространств в фильтрации, состоящей из подпространств функций, для которых величина нормирования не меньше данной. (Имеется обобщение понятия ряда Пуанкаре на наборы нормирований). Как оказалось, ряд Пуанкаре описанного нормирования на пространстве ростков **голоморфных** функций двух переменных по сути совпадает с многочленом Александера соответствующего алгебраического узла: пересечения кривой C с маленькой (трёхмерной) сферой с центром в начале координат.

В случае, если описанное нормирование рассматривается на пространстве ростков вещественно аналитических функций, ситуация существенно отличается от той, которая имеет место в комплексном случае. (В частности, возникают другие аналоги рядов Пуанкаре.) Ещё «более богатой» является ситуация, когда нормирование рассматривается на пространстве функций, определённых над другим подполем поля комплексных чисел, например, над полем рациональных чисел. (В этом случае удобнее говорить не о пространстве функций, а о пространстве формальных степенных рядов.) Будут описаны ряды Пуанкаре для указанного нормирования в этом случае и насколько они определяют геометрию разрешения кривой. В частности, насколько ряд Пуанкаре нормирования на пространстве вещественных функций определяет вещественную топологию кривой.

В. В. Казак (ЮФУ, Россия)
vkazak136@gmail.com
Н. Н. Солохин (ЮФУ, Россия)
nik2007.72@mail.ru

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПУАНКАРЕ В ТЕОРИИ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ

В работе объединяется класс задач, граничные условия которых, наряду с искомыми функциями, содержат также и частные производные первого порядка. К таким задачам приводит исследование бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с краем, на который накладываются различные условия при её деформации. К этим условиям относятся втулочные связи, условие обобщенного скольжения, ограничения на кручение и кривизну края и многие другие. Изучение бесконечно малых изгибаний таких поверхностей сводится к решению краевых задач для обобщенных аналитических функций. В частности, одно из общих геометрических условий имеет вид:

$$\alpha(\overline{U},\bar{\ell})+\beta(\overline{V},\bar{L})=\sigma \quad \text{на} \quad \partial, \tag{1}$$

где $\overline{U}=\overline{U}(x,y)\in C^{3,\mu}$, $\overline{V}=\overline{V}(x;y)$ — векторы смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, векторные поля $\bar{\ell}$, $\bar{L}$ и функции α, β, σ принадлежат классу C^{μ}, $0<\mu<1$. Изучение этого краевого условия при различных α и β приводит к следующим краевым задачам:

$$\begin{cases} w_{\bar z}+B\bar w=0, & z\in D,\\ \mathrm{Re}\{\overline{a(t)}w_t+\varepsilon b(t)w\}=\sigma, & t\in\partial D \end{cases} \tag{2}$$

Для поверхностей Дарбу эта задача принимает вид:

$$\begin{cases} w_{\bar z}=0, & z\in D,\\ \mathrm{Re}\ \overline{a(t)}w_t+\varepsilon\overline{b(t)}w=\sigma, & t\in\partial D \end{cases} \tag{3}$$

Данные задачи сводятся к системе интегральных уравнений, которую можно записать в виде $\hat U=\varepsilon T\hat U+\sigma$. Исследование этой системы позволяет судить о характере жёсткости поверхности, подчинённой на краю смешанному краевому условию (1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Фоменко В. Т.* О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний // СМЖ. — 1974. — Т. XV, N 1. — С. 152–161.

2. *Виноградов В. С.* Об одном методе решения задачи Пуанкаре для аналитических функций // Доклады Академии Наук СССР. — 1960. — С. 17–19.

3. *Казак В. В., Солохин Н. Н.* О квазикорректности смешанного краевого условия для одного класса поверхностей. // Современные проблемы математики и механики, том VI, выпуск 2. Издательство Московского университета, 2011. — С. 212–216.

В. В. Штепин, Д. В. Штепин (Москва)
shtepin.vv@phystech.edu, shtepin-dv@rguk.ru

О свойствах геометрических представлений конечных групп

Определение. *Геометрический граф группы* G — граф группы G на сфере единичного радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ наименьшей размерности (обозначим его V), в котором евклидовы расстояния ρ (назовем их действительными) между элементами группы удовлетворяют соотношению $\rho(g_i, g_j) = \rho(g_k, g_l) \Leftrightarrow \rho'(g_i, g_j) = \rho'(g_k, g_l)$ $\forall i, j, k, l$, где ρ' — расстояния (назовем их мнимыми) между элементами группы G, вычисленные по формуле $\rho'(g_i, g_j) = \sum\limits_{x \in G} \sigma_x(g_i, g_j)$, а $\sigma_x(g_i, g_j)$ — наименьший целый неотрицательный показатель степени k, для которого справедливо равенство: $x^k g_i = g_j$ или, если такое k не существует, то $\sigma_x(g_i, g_j) \overset{def}{=} 0$.

Мы реализуем геометрический граф группы G порядка n как набор n различных векторов $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ единичной длины в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Будем считать, что действие элемента g из группы G продолжается с векторов графа по линейности на векторы пространства V. Полученное продолжение является представлением T_Γ группы G в пространстве V, называемым геометрическим представлением [1,2].

Теорема 1. *Размерность геометрического графа любой конечной группы (и размерность ее геометрического представления) удовлетворяют неравенству* $\dim V < |G|$.

Теорема 2. *Сумма всех операторов геометрического представления произвольной конечной группы G является нулевым оператором.*

Следствие 1. *Сумма всех векторов геометрического графа равна* $\overline{0}$.

Следствие 2. *Одномерное тривиальное представление E группы G не входит в геометрическое представление T_Γ группы G.*

Известные (см. [1]) примеры геометрических представлений показывают, что они содержат неприводимые представления G максимальной размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скородумов В. Ф., Штепин Д. В.* О геометрическом представлении группы вращений правильного тетраэдра // Труды МФТИ. 2023. Т. 15, № 2. С. 74–87.

Секция IV
Теория вероятностей и стохастические методы

А. Е. Кондратенко, М. Ю. Копытько, В. Н. Соболев (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова)
ae_cond@mech.math.msu.su, mariia.kopytko@math.msu.ru, sobolev_vn@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ДРОБНОЙ ЧАСТИ СВЕРТОК ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К РАВНОМЕРНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Остаток от деления целого числа a на натуральное число N будем называть дробной частью целого числа a и обозначать $\{a\}_N$.

На Восьмой международной конференции по стохастическим методам (МКСМ–8) [1] было рассказано о сходимости дробной части сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин к равномерному распределению.

В [2] было найдено достаточное условие сходимости дробной части сверток абсолютно непрерывных разнораспределенных случайных величин к равномерному распределению.

В работе будет получено достаточное условие сходимости дробной части сверток целочисленных разнораспределенных случайных величин к равномерному распределению.

Теорема.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ суть независимые случайные величины, распределенные на $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Тогда если существуют $\varepsilon_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$ такие, что для любых $m \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $k = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$\left|\mathrm{P}(\xi_k = m) - \frac{1}{N}\right| \leqslant \frac{\varepsilon_k}{N}$$

и $\varepsilon_1 \cdot ... \cdot \varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, то для всех $m \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + ... + \xi_n\}_N = m\big) \to \frac{1}{N}, n \to \infty.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Кондратенко А.Е., Кондратенко Н.А., Соболев В.Н., Чернышова Д.А.* О сходимости дробной части сверток пуассоновских случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. — 2023. — Т. 68, № 4. — С. 846–847

2. *LIH-YUAN DENG, E. Olusegun George* Generation of Uniform Variates from Several Nearly Uniformly Distributed Variables, Communications in Statistics — Simulation and Computation, 19:1, 145–154.

Н. А. Елизарова, В. Н. Соболев, А. Е. Кондратенко (Москва)
elizarova77@mail.ru, sobolev_vn@mail.ru,
ae_cond@mech.math.msu.su

К ВОПРОСАМ СХОДИМОСТИ В ЗБЧ

Б. В. Гнеденко сформулирован и доказан ЗБЧ в форме Гнеденко (см., например, [1, стр. 191]). Он является критерием, т.е. несёт в себе как необходимое, так и достаточное условие. Оказывается, что данный критерий выполняется для следующего класса функций

$$\mathfrak{G} = \{g : \ g(x) = g(-x)\,,\ g(0) = 0,\ g(x) \nearrow 1 \text{ на } [0, +\infty]\}\ .$$

Для удобства формулировок определим случайные величины

$$\varsigma_n = \frac{S_n - \mathrm{M}S_n}{n}\,,$$

в терминах которых ЗБЧ означает стремление величины ς_n к нулю по вероятности: $\varsigma_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$.

Теорема. (*обобщённый ЗБЧ*) Пусть задана последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Тогда для $g \in \mathfrak{G}$

$$\left(\varsigma_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0\right) \Longleftrightarrow \left(\mathrm{M}\left(g\left(\varsigma_n\right)\right) \to 0\right)\ .$$

Замечание. ЗБЧ в форме Гнеденко [1, стр. 191] получается при

$$g\left(\varsigma_n\right) = \frac{\varsigma_n^2}{1 + \varsigma_n^2}\,.$$

Авторы выражают искреннюю признательность В. В. Козлову и М. В. Козлову за внимательное прочтение работы и сделанные замечания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М. : Наука, 1988. — 448 с.

В. Н. Соболев, А. Е. Кондратенко, Н. А. Елизарова (Москва)
sobolev_vn@mail.ru, ae_cond@mech.math.msu.su,
elizarova77@mail.ru

ОБ ОДНОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ СВОЙСТВЕ ФЕЙЕРОВСКИХ ПАР ИЛИ ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При изучении различных вопросов связанных со свертками функций, интегралами Фурье, суммированиями некоторых интегралов достаточно часто используются Фейеровские пары [1, стр. 29].

С вероятностной точки зрения данные пары функций (ядер) могут рассматриваться как плотность некоторого распределения вероятностей и его характеристическая функция (х.ф.). Так, пара Фейера представляет собой плотность вероятности симметричного треугольного распределения на отрезке $[-1, 1]$ и её характеристическую функцию (х.ф.), паре Абеля–Пуассона можно сопоставить распределение Коши и его х.ф. или стандартное распределение Лапласа (двустороннее экспоненциальное распределение) и его х.ф., паре Гаусса с вероятностной точки зрения соответствует плотность стандартного нормального распределения и его х.ф.

Все распределения в Фейеровских парах являются чётными в силу их построения как чётных функций. Кроме того они унимодальны. Однако уникальным свойством таких пар является их симметричность (обратимость), в том смысле, что плотность из одной Фейеровской пары с точностью до умножения на константу соответствует характеристической функции из другой пары. Иными словами функция, являющаяся ядром Фейеровской пары, с точностью до константы проявляет себя одновременно как и плотность, так и х.ф. Возможно, данная особенность класса таких плотностей (или х.ф.) и лежит в удобстве их использования при изучении перечисленных выше задач. В работе рассматриваются некоторые вероятностные свойства таких функций и их представлений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. — М. : Наука, 1966. — 671 с.

Секция V
Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко (Казань)
ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

О ВЛИЯНИИ СОЧЕТАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПАРАМЕТРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА И ТРЕНИЯ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

В работе, продолжающей исследование [1], представлены результаты [2–5] применения сочетаний линейных управляющих воздействий. Анализируются результаты вычислительных экспериментов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О прямых задачах управления пограничным слоем при гиперзвуковых режимах полёта // XXVI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». 27 мая–3 июня 2018 г. Материалы. Ростов н/Д: Изд-во Фонд науки и образования, 2018. С. 72–73.

2. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейно возрастающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2019. № 3. С. 53–62.

3. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейно возрастающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2019. No 4. С. 5–12.

4. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейно убывающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2019. No 4. С. 13–20.

5. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейно убывающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2020. No 1. С. 5–14. [doi: 10.17308/sait.2020.1/2573]

Н. В. Зеликин (Москва)
n-zl@math.msu.su

КАТЕГОРНЫЕ МЕТОДЫ, НОВЫЕ ПЕРСПЕКТИВЫ

Проникновение идей теории категорий (ТК) в области прикладных наук сделало настоятельным обобщение и развитие в едином концептуальном русле общего направления, естественным образом получившего название категорных методов (КМ). Впервые этот термин появился в работе [1], однако существенное наполнение получил в коллективном труде [2] ряда исследователей, оценивших методологический потенциал ТК. В этих работах заметен явный акцент на возможностях моделирования и обобщения, как основных достоинствах КМ, в то время как недооцененным остаётся более фундаментальная способность категорного подхода к проникновению в суть явлений материального мира. В категорных методах философский, мировоззренческий взгляд на реальность находит совершенно адекватную математическую интерпретацию. Помимо кристально чистых математических работ по ТК, расширяющих образы, понятия, конструкции базовой теории, появилось достаточно много трудов, направленных на осознание концептуальной роли ТК, её способности решать все новые задачи, которые она вбирает без ненужных деклараций, просто в силу постепенного разрастания из правильно заложенных основ. Как отмечено в [3], идеи ТК охотно принимались лишь там и лишь тогда, когда они были важны для практики и к ним было приложимо свойство естественности. Отталкиваясь от неразрешимых в рамках теории множеств проблем, ТК предложила концепцию единой универсальной категории, что соответствует современным представлениям о постоянно изменяющихся горизонтах познания, в рамках определенного неизменного набора незыблемых законов, свидетельствующих о единстве материального мира. Универсальная категория самопроизвольно структурируется в каждой области, от физической среды до социально-экономических пространств, в соответствии с определяющими формообразующими условиями и превалирующими отношениями внутри каждой области [4]. Обращает на себя внимание полное поэлементное совпадение категорных образов с философскими. Это относится, прежде всего к проблематике соотношения части и целого, соотношению объекта и окружающей среды, многократной вложенности объектов и цикличности процессов, непрерывности развития, направленности явлений и проч. Категорные методы дают возможность выхода за рамки оценок тех или иных моделей и обобщения накопленных знаний в область осмысления базовых концепций развития, единых для всех проявлений материального мира. По меткому определению [3] категория есть одновременно и объект как таковой, единый и целостный в себе, и как средство раскрытия его как части более общей структуры, включения его в систему как неотъемлемой части следующего уровня структуризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jean-Pierre Marquis* — A study of the history and philosophy of category theory. Springer, 2009

2. *Baez John et all* — Categorical Methods at Crossroads. 2014 http://www.dagstuhl.de/14182

3. *Kromer Ralph* — Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory

4. *Зеликин Н. В.* — Категорный социально-экономический анализ. XXVIII Конференция МАТЕМАТИКА. ЭКОНОМИКА. ОБРАЗОВАНИЕ, 2022

V. L. Litvinov (Samara), K. V. Litvinova (Moscow)
vladlitvinov@rambler.ru, kristinalitvinova900@rambler.ru

VIBRATIONS OF A BEAM WITH A MOVING BOUNDARY, LYING ON AN ELASTIC BASE

The approximate Kantorovich–Galerkin method is considered in relation to solving a problem describing the oscillations of a beam with a moving boundary lying on an elastic foundation. The mathematical formulation of the problem includes a partial differential equation with respect to the desired displacement function and inhomogeneous boundary conditions. The Kantorovich–Galerkin method [4] allows one to take into account the initial conditions, but they do not affect the resonant properties of linear systems, so they are not taken into account in this case. The solution is made in dimensionless variables up to second-order values of smallness relative to small parameters characterizing the speed of motion of the boundary. The results obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the nth dynamic mode are presented, which makes it possible to use the results obtained to analyze the oscillations of technical objects with moving boundaries.

One-dimensional systems, the boundaries of which move, are widespread in technology: ropes of lifting installations, flexible gear links, solid fuel rods, drill strings [1, 2], etc. The presence of moving boundaries causes significant difficulties in describing such systems. Of the analytical methods, the most effective is the method that consists in selecting new variables that stop the boundaries and leave the wave equation invariant. However, exact solution methods are limited to the wave equation and relatively simple boundary conditions, so in the case of moving boundaries, approximate solution methods are mainly used.

Thus, the application of the Kantorovich–Galerkin method allows one to obtain a relatively simple expression for the amplitude of forced vibrations of a rod of variable length, which allows the results obtained to be used to analyze the vibrations of technical objects with moving boundaries.

Bibliography

1. *Savin G. N., Goroshko O. A.* Dynamics of a thread of variable length // Nauk.dumka, Kyiv, 1962, P.332. 2. *Vesnitsky A. I.* Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, M., 2001, P.320. 3. *Litvinov V. L., Anisimov V. N.* Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Izvestia of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 2018. No. 2. P. 70–77.

М. В. Меликян, А. А. Лыков (Москва)
mv.melikian@gmail.com

О ТЕПЛОВОМ ЭХО В ОДНОМЕРНОМ ЗАКРЕПЛЕННОМ КРИСТАЛЛЕ

Рассмотрим одномерный закрепленный кристалл, где атомы моделируются гармоническими осцилляторами $x_k(t),\ k = 1, ..., N$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_n(t) = -\omega_0^2(x_n(t) - nd) + \omega_1^2(x_{n+1}(t) - 2x_n(t) + x_{n-1}(t)), \quad n = 1, ..., N, \\ x_{n+N} = x_n,\ \forall n, x_n(0) = nd, \dot{x}_n(0) = \sigma\xi_n, \end{cases}$$

где $\{\xi_k\}_k$–н.о.р. сл.в., $E\xi_k = 0;\ D\xi_k = 1,\ k = 1, ..., N,\ \sigma > 0,\ d > 0$. Обозначим $q_n(t) = x_n(t) - nd,\ p_n(t) = \dot{q}_n(t),\ q(t) = (q_1(t), ..., q_N(t))^T$, $p(t) = (p_1(t), ..., p_N(t))^T$. Тогда исследуемую систему можно переписать в виде: $\ddot{q} = -Vq$, при этом введенный оператор V оказывается положительно определенным. Введем понятие средней кинетической температуры кристалла: $T_N(t) = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} Ep_k^2(t)$. Тогда верна

Теорема. (О кинетической температуре)

$$T_N(t) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{T}_N(2t),\ \widetilde{T}_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} cos(t\omega_k),$$

$\omega_k^2 = \omega_0^2 + 4\omega_1^2 sin^2\frac{\pi k}{N},\ k = 1, ..., N$– собственные значения матрицы V. При $N \longrightarrow +\infty$, любого фиксированного $p \geqslant 0$ и всех $x \in (0; 1)$ выполняются асимптотические соотношения:

$$\widetilde{T}_N(\frac{r + x}{\widetilde{\omega}}) \sim \frac{b_r^{(N)}(x)}{\sqrt{N}},\ \widetilde{T}_N(\frac{r + 1}{\widetilde{\omega}}) \sim \frac{a(r)}{\sqrt[3]{N}},\ \frac{1}{\widetilde{\omega}} = \frac{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_1^2}}{2\omega_1^2},$$

где $b_r^{(N)}(x),\ a(r)$ зависят от параметров модели.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Lykov A. A., Melikian M. V.* Long time behavior of infinite harmonic chain with l_2 initial conditions // Markov Processes and Related Fields 2020. V. 26, № 2. P. 189–212.

2. *Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V.* Phase diagram for one-way traffic flow with local control // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier BV (Netherlands). 2017. V. 486. P. 849–866.

3. *Lykov A. A., Murachev A. S.* On the kinetic temperature of a one-dimensional crystal on the long-time scale // https://ssrn.com/abstract=4564495 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4564495

А. Ю. Переварюха, А. В. Погодина, Д. А. Данилова
(Санкт–Петербург, РАНХиГС)
madelf@rambler.ru

МОДЕЛИ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ИНВАЗИОННОЙ АКТИВНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ [1]

Эффекты запаздывания нами разделены на три типа по биологическому генезису и роли в развитии процессов. Инвазионные процессы проходят этап кризисной динамики $N(t) \to 0 + \epsilon$ и сопровождаются длительными осцилляциями. В результате биосистема получит несколько сценариев динамики кризиса, включая гибель $N(t_\infty) = 0$.

Зададим пороговое развитие инвазионного популяционного процесса в уравнении с функцией сопротивления среды $\dot{N} = F(N(t-\tau)) - \Psi(N(t-\nu))$. Пороговый эффект реакции агрессивному росту численности вселенца выразим $\ln_K$-регуляцией в функции противодействия $\Psi(N(t-\nu))$ и при $\mathcal{Q} > q, m \geq 2, N(0) < J < \mathcal{K}$. Запаздывание ν в модели инвазии нами возмущенно равномерно распределенной случайной величиной $\nu \times \gamma$ на плавающем отрезке: $[0, 0.5\nu]$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau)}\right) - \mathcal{Q}\frac{N^m(t-\nu\times\gamma)}{(J-N(t))^2} - qN(t). \qquad (1)$$

Вместо стабилизации $N(t) \to K, N(t_S) < K$ и превышения равновесия K стадия кризиса с возрастанием $F(N^2; J^{-1})$ при $N \to J$ и потенциал роста не нивелирован $\ln_K$-регуляцией. Время активации вариативно, но не менее τ_1. Пусть τ_1 варьируется случайной величиной γ в ограниченном диапазоне. Предложим модель с возмущенным равномерной случайной величиной γ запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau\gamma)}\right) - \frac{\delta N^2(t-\tau_1\gamma)}{(J-N(t))^2} - qN(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1,2]. \quad (2)$$

При приближении $N(t)$ к пороговому значению $J, N(0) < J < \mathcal{K}$ резкий переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \to 0 + \epsilon$. Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний $N(t) \to N_*(t), \max N_*(t) < J$ зависит от стохастических факторов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Переварюха А. Ю.* Моделирование эффекта волнообразной кривой воспроизводства популяций рыб // Экологические системы и приборы. 2008. № 8. С. 41–44.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке **РНФ, проект** 23−21−00339.

Е. Н. Сюсюка (Новороссийск)
sollain66@rambler.ru

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ СУДОВОГО ВАЛОПРОВОДА МОБИЛЬНЫМ СТАНКОМ

Увеличение мощности главных двигателей, размеров и массы гребных винтов и валов современных морских судов привело к возрастанию гидродинамических усилий, действующих на гребные валы и дейдвудные устройства. В процессе эксплуатации в валопроводах судов возникают усталостные трещины, язвенная коррозия под облицовками, задиры, трещины, раковины и другие дефекты. Традиционно, обработка гребных валов производится на специальных стационарных токарных станках, имеющих часто базу более 10 метров, отличающихся большой материало- и энергоёмкостью, сложностью конструкции и высокой стоимостью Предлагается: для восстановления рабочих поверхностей судовых валопроводов и других цилиндрических деталей с нестационарной осью вращения использовать переносной малогабаритный станок, управляемый электрогидравлическим шаговым приводом (ЛЭГШП).

Технологическая система не имеет стационарных размерных связей, станок базируется на элементах опор ремонтируемого вала, либо на самой обрабатываемой поверхности. При каждой обработке детали при базировании станка, требуется геометрическая настройка станка – установка параллельности траектории перемещения вершины резца и оси обрабатываемой детали.

В этом случае совмещением прямолинейной и кольцевой образующих линий цилиндрического тела вращения в результате обработки обеспечивается точность цилиндричности. Ось вращения детали является конструкторской и технологической базой при установке мобильного станка. При реализации технологических методов восстановления цилиндричности поверхностей качения путем обработки лезвийным инструментом в качестве привода главного движения при точении используют функциональные движения действующих агрегатов — собственное вращение обрабатываемой детали.

Разработаны алгоритмы обработки валопровода мобильным станком 2-го ранга, преимуществом которого является возможность получить цилиндрическую поверхность (или другой заданный профиль) по результатам измерения первого прохода при установке станка с погрешностью относительно оси детали.

Представлена оригинальная схема вращения секции валопровода, а также схемы изменения положения валопровода в ходе обработки. Обоснована возможность применения линейного электрогидравлического шагового привода (ЛЭГШП) с корректирующей программой для реализации обработки с учетом автоматических измерений и заданной погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Н. Сюсюка, К. Б. Пальчик, С. А. Худяков.* Токарная обработка гребных валов крупнотоннажных морских судов мобильными станками. – Эксплуатация морского транспорта, 2018. — №4 — С. 76–79.

2. *С. А. Худяков, Е. Н. Сюсюка, К. Б. Пальчик.* Анализ дефектов валопроводов морских судов и методы их устранения. — Эксплуатация морского транспорта, 2019. № 2 (91), С.89–92.

3. *Е. Н. Сюсюка.* Анализ возможности повышения точности обработки валопроводов морских судов мобильными станками с использованием электрогидравлического шагового привода. — Эксплуатация Морского транспорта, 2019. № 3 (92), С.180–185.

4. *Е.Н. Сюсюка.* Особенности обработки валопроводов морских судов мобильным оборудованием. — «Научно-технические, экономические и правовые аспекты развития транспортного комплекса»: материалы 3-й (XVII) национальной научно-практической конференции 14–15 ноября 2019 года в 2-х частях. Ч.1. – Новороссийск: РИО ГМУ

5. *Е. Н. Сюсюка.* Анализ математических зависимостей для расчета траектории движения инструмента мобильного станка при обработке судовых валопроводов. Эксплуатация Морского транспорта, 2020. № 4 (97), С.180–185. eLIBRARY ID: 44721390 DOI: 10.34046/aumsnom197/23

6. *Syusyuka and E. Kh. Amineva* Control of mobile equipment for the processing of marine shaft lines. Journal of Physics: Conference Series, Volume 2061, International Conference on Actual Issues of Mechanical Engineering (AIME 2021) 15–16 June 2021, Novorossiysk, RussiaCitation E. N. Syusyuka and E. Kh. Amineva 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 2061 012083

7. *Сюсюка Е. Н.* Анализ механических связей электрогидравлического шагового привода мобильного станка с программным управлением применительно к физическим условиям обработки поверхностей валов. Эксплуатация Морского транспорта, 2021(101). № 4

Секция VI
Математическое программирование и теория игр

Х. Р. Агиев (Магас)
khasan.agiev@bk.ru

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ И МОРСКОГО ПОРТА

Задача оптимизации мультимодальных перевозок при взаимодействии железной дороги и морского порта решается с позиций теории управления организационными системами. Важно отметить, что задача оптимизации логистического взаимодействия не столько техническая, сколько организационно-экономическая, и основные трудности при её практическом решении возникают из-за недостаточного внимания к учёту и согласованию интересов активных участников этого взаимодействия.

Поэтому для решения указанной задачи используются модели стимулирования активных агентов (Новиков, 2007). В отличие от классических моделей теории управления организационными системами, основное внимание уделяется динамическим моделям стимулирования. Проведено аналитическое и численное исследование упрощённой модели стимулирования двух агентов на примере системы железная дорога – морской порт. Модель включает трех игроков: Центр – для обобщённая структура, включающая в себя функции министерства транспорта РФ и частично ОАО "РЖД"; Агент 1 – компания, выполняющая перевозки на железнодорожном транспорте; Агент 2 – транспортная компания, выполняющая морские перевозки. Агент 1 и Агент 2 находятся в подчинении Центра и выбирают свою политику после выбора стратегий Центра (игра Гермейера Г1).

Для Центра основными источниками дохода являются предоставление стыковочных мест на подвижных составах РЖД и портовые сборы. Основные источники расходов для Центра: содержание подвижных составов, ж/д и портовой инфраструктуры.

Для Агента 1 основным источником дохода является перевозка товаров. Основные источники расходов: аренда сцепки для вагонов; неустойка по перевозке груза; расходы на содержание составов.

Для Агента 2 основной источник дохода - перевозка товаров морскими путями. Основные источники расходов: портовые сборы; неустойка по перевозке груза; обслуживание кораблей при перевозке; обслуживание погрузочного оборудования. Посредством аналитического исследования сделаны выводы, упрощающие нахождение решения путем имитации. Разработаны программы вычисления оптимального управления ведущего и ведомых для упрощенной статической модели, написанные на языке программирования C#. Далее описана более общая динамическая модель и приведены результаты её имитационного исследования в различных вариантах. Разработана информационно-аналитическая система поддержки решений по управлению логистическим взаимодействием активных агентов.

М. Б. Агиева (Магас)
agieva.1997@mail.ru

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ В УСЛОВИЯХ КОРРУПЦИИ

Задача управления качеством в двухуровневой организационно-экономической системе при коррупции формализуется как игра Ю. Б. Гермейера вида Г2 с учётом требований гомеостаза. Находится решение этой игры с помощью теоремы Ю. Б. Гермейера. Дополнительно рассматривается случай неполной информированности ведущего. Изучаются возможности влияния неявно участвующего в модели центра по ограничению коррупции с помощью штрафов.

Исследуется модель управления качеством в трехуровневой организационно-экономической системе при коррупции с явным наличием центра. Дополнительно выявляются условия, при которых центру выгодно не ограничивать коррупцию, а поддерживать её. Для численной иллюстрации и более детального изучения моделей разработан и описан программный комплекс на языке Java.

В рассматриваемой постановке базовым объектом является организационно-экономическая система. Эта система управляемая, так как её состояние зависит от стратегии производства. Состояние системы описывается набором характеристик, которые включают в себя затраты и показатели качества. Субъектом управления является агент. Именно агент выбирает стратегию производства с целью максимизировать собственную функцию выигрыша. Функцией выигрыша агента служит его прибыль, получаемая за определённый промежуток времени.

В рассмотренной модели центр сам непосредственно не участвует в коррупционной деятельности. Более того, он даже тратит средства на антикоррупционные меры и взимает штрафы со взяточников, которые в идеале покрывают ущерб, наносимый несоблюдением условий гомеостаза. Однако, при определённых значениях параметров центр экономически не заинтересован в полной победе над коррупцией, поскольку она влечет увеличение затрат на обнаружение нарушений и отсутствие штрафов.

Статическая задача управления качеством в трехуровневой организационно-экономической системе при коррупции также поставлена как игра Гермейера типа Г2 и решена численно при ступенчатом виде функций штрафа, отвечающему реальному законодательству. Законодательно можно заменить денежные штрафы за коррупцию на другие меры наказания, например, на уголовную ответственность в виде лишения свободы. С одной стороны, это лишит центр мотивации, связанной с экономической выгодой от штрафа. Но с другой стороны, такая политика создаст условия для коррупции уже на уровне центр-контролер.

Секция VII
Информационно-коммуникационные технологии в науке, образовании и производстве

И. В. Ермакова (Москва)
i_ermakova@mail.ru

Использование новейших технологий для получения новых продуктов питания. Еда будущего?

В последнее время на рынке появляется всё больше продуктов питания, полученных с помощью новейших технологий. Является ли это необходимостью или это дальнейшее развитие человечества? Рассматриваются такие продукты питания, как

- Генетически модифицированные организмы: ГМ овощи и ГМ фрукты.
- Насекомые вместо мяса.
- Ферментированные продукты.
- Еда, напечатанная на 3D принтере.
- Мясо из стволовых клеток.
- Микрозелень.

Особое внимание уделяется технологиям получения подобных продуктов питания, анализируются возможные риски для здоровья и жизни людей и животных, приводятся аргументы выгоды от их использования.

А. С. Жук (Новороссийск)
alszhuk@yandex.ru

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ В ЗАДАЧАХ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ СУДОВ

Предлагается метод планирования маневра для предупреждения столкновений судов, основанный на множествах достижимости как совокупностях всех возможных состояний судов-целей в заданные моменты времени. Такой подход расширяет возможности средств автоматической радиолокационной прокладки в условиях непредсказуемости движения судов-целей.

Движение судов-целей описывается моделью машины Дубинса в виде

$$\dot{\mathrm{x}} = V \begin{bmatrix} \sin K & \cos K \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}; \quad |\dot{K}| \leq \omega_{max}; \quad \dot{V} = 0, \tag{1}$$

где x – вектор координат в прямоугольной системе координат, связанной с меридианом и параллелью; V – линейная скорость; K – курс; ω_{max} – максимальная угловая скорость.

Множества достижимости судов-целей дополняются зоной навигационной безопасности, в результате получаются множества возможных столкновений $\mathrm{ОВС}_i(t)$, которые представляются в пространстве скоростей [1] в виде

$$\mathrm{ОПС}_i(t) = \frac{\mathrm{ОВС}_i(t)}{t}; \quad t \in [t_0, t_f], \tag{2}$$

где t_0, t_f – границы горизонта планирования.

В пространстве скоростей области возможных столкновений остаются ограниченными даже с увеличением горизонта планирования до бесконечности, таким образом, определяются гарантированно безопасные управления на различных горизонтах планирования. Корректирование управления выполняется через заданные промежутки времени на основе простого эвристического правила: выбирается ближайшая к целевой путевой точке безопасная траектория. Метод в общем случае не обеспечивает оптимальное быстродействие, но позволяет эффективно решать задачи предотвращения столкновений и движения в целевую путевую точку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhuk A. S.* Guaranteed Safe States in Speed Space for Ships Collision Avoidance Problem // Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems. Springer. Cham. 2023. Vol. 702. pp. 441—449.

Н. Э. Самойленко, Н. В. Ципина, Д. Р. Воронин,
А. Я. Болычев, К. Д. Ципина (Воронеж)
ju.i@mail.ru

Информационные технологии в задачах проектирования пластин жидкостного охлаждения

Исследуемая пластина жидкостного охлаждения блока нагрузки представляет собой лист меди М1, толщиной 14 мм. С внутренней стороны имеется фрезерованные каналы для потока жидкости, резьбовые отверстия и канавка для уплотнения подложки. С внешней стороны находятся отверстия под винт М3 на проход по краям пластины, а также резьбовые отверстия М3 для крепления 16 резисторов центральной группы. Сверху находятся отверстия под фитинги, через которые будет проходить жидкость.

Данная пластина предназначена для отвода тепла от генератора мощностью до 5 кВт. Резисторы используются в качестве активной нагрузки, каждый из них может рассеивать 312 Вт тепла.

Сформирована математическая постановка, предложена методика моделирования и выполнены процедуры оптимизации пластин жидкостного охлаждения. На основе разработанной 3D-модели пластины реализованы процедуры многовариантного анализа с помощью современных средств автоматизированного проектирования.

Проведена оптимизация системы жидкостного охлаждения с использованием современных программных средств моделирования, в частности программы Solidworks Simulation. Актуальность разработки заключается в реализации оптимизации конструкции пластины по двум критериям: минимум температуры и перемещения. Применение разработанной конструкции обеспечивает рассеивание требуемой мощности генератора.

Изготовлен опытный образец спроектированной пластины. Экономическая эффект от предложенной методики обусловлен невысокой стоимостью и высоким КПД системы охлаждения. Проработана возможность проектирования инновационной структуры каналов пластины жидкостного охлаждения с применением методов топологической оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болычев Я. А., Самойленко Н. Э., Ципина Н. В., Турецкий И. А.* Методика моделирования радиаторов жидкостных систем охлаждения радиоэлектронных средств // Радиотехника. 2023. Т. 87. No 8. С. 77–81. 2. *Самойленко Н. Э., Ципина Н. В., Каграманов Э. Э., Воронин Д. Р., Ципина К. Д.* Моделирование и оптимальное проектирование системы жидкостного охлаждения электронного модуля // Радиотехника. 2023. Т. 87. No 8. С. 105–109.

А. В. Сидоренко (Минск, Беларусь)
sidorenkoA@yandex.by

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ОГИБАНИЕМ ПРЕПЯТСТВИЙ

Проблема управления движением мобильного робота при известном его местоположении при перемещении к цели с заданными координатами в настоящее время является одной из актуальных. При решении задач подобного рода существенным становится обеспечение безопасности движения робота без столкновения с препятствиями, встречающимися на его пути. Традиционно при решении подобных задач используются методы машинного обучения. Критерием оптимизации является определение количества эпизодов, необходимых для обучения [1].

Целью работы является разработка алгоритма при огибании препятствий и навигации в среде, моделируемой в пакете визуализации Gazebo.

В данной работе предложен алгоритм, для реализации которого использовался пакет для MatLab Reinforcement Learning Toolbox. Реализация симуляционного пространства, в котором осуществлялось движение робота, обеспечивалось пакетом визуализации Gazebo 11.

При реализации алгоритма между начальной и конечной точкой перемещении робота задается прямая линия L. В процессе движения при встрече препятствия робот его огибает, двигаясь вдоль препятствия до тех пор, пока не встанет на начальную линию L. При огибании препятствия робот движется вдоль препятствия до тех пор, пока не удалится от него на расстояние в 0,37 единиц координатной сетки. При удалении свыше, робот поворачивается на 90 градусов и движется в том же направлении, пока не станет на линию L. Став на линию L, он поворачивается в направлении к цели и начинает движение вперед до тех пор, пока не встретит препятствие (либо достигнет цели). Далее алгоритм движения повторяется.

В результате проведенного эксперимента установлено, что при огибании препятствий кубического и цилиндрического типов (по пять в каждом случае) время преодоления на превышает трех минут. Это свидетельствует о том, что полученные при моделировании временные параметры значительно лучше, чем при использовании машинного обучения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сидоренко, А. В.* Глубокое обучение с подкреплением для роботизированной системы / А. В. Сидоренко // VII Белорусский Космический Конгресс. — 2022. – В двух томах. – Т. 1. – С. 206–209.

М. А. Шубарин (Ростов-на-Дону)
mas102@mail.ru

СОЗДАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ДОКУМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯЗЫКА РАЗМЕТКИ RMARKDOWN

Концепция динамического документа была предложена с статье Д. Е. Кнута [3] и её можно кратко описать следующими словами Д. Е. Кнута:

> «Я верю, что пришло время для существенно лучшего документирования программ, и что мы можем достигнуть этого сделав программы литературными произведениями».

Одно из направлений литературного программирования реализовано в языке разметки RMarkdown, который включает в себя следующие компоненты:

- язык разметки Markdown, который является упрощённой версией HTML,
- интеграцию с языком программирования R, который, в частности, ориентирован на решения задач математической статистики. Подробное описание возможностей RMarkdown содержится в книге [4], написанной одним из разработчиков библиотеки Knitr (подробное описание этой библиотеки есть в справочнике [5]).

Другой подход к включению компьютерного кода текст основан на инструменте Sweave (по терминологии автора статьи [2]) и он позволяет встраивать код на языке R в документ в фомате LaTeX.

В качестве примера будет рассматриваться статья [1], написанная с применением языка RMarkdown.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Шубарин М. А.* Применение языка R при изучении прикладной статистики (для студентов нематематичеких направлений подготовки) // Мат. вест. Вятского гос. ун-та. 2022. № 4 (27). с. 29-33.

2. *Leisch F.* Sweave and Beyond: Computations on Text Documents // https://www.r-project.org/conferences/DSC-2003/Proceedings/Leisch.pdf.

3. *Knut D. E.* Literate Programming // The Computer Journal. 1984. V., Issue 2. P. 97–111.

4. *Yihui Xie* Dynamic Document with R and knitr. CRC Press, 2015. 262 p.

5. https://cran.r-project.org/web/packages/knitr/knitr.pdf

Секция VIII
Цифровая экономика: тенденции развития

С. В. Савин, А. Д. Мурзин (Ростов-на-Дону)
rostovs@list.ru, admurzin@yandex.ru

Прогнозирование экономических трендов с помощью алгоритмов машинного обучения

Прогнозирование экономических трендов становится все более актуальным в условиях высокой волатильности и неопределенности макроэкономической среды в 20-х годах 21-го века, а также возрастающей сложности экономических систем. Развитие технологий искусственного интеллекта и машинного обучения открывает новые возможности для повышения точности прогнозов, а спрос на них со стороны бизнеса и государства постоянно растет.

Сейчас, в 20-х годах 21-го столетия машинное обучение широко применяется для прогнозирования различных макроэкономических показателей, в том числе, ВВП, инфляция, процентные ставки, курсы валют и др. Оно показывает довольно высокую точность краткосрочных и среднесрочных экономических прогнозов по сравнению с традиционными эконометрическими моделями и потому представляет собой мощный инструмент, помогающий выявлять тенденции, анализировать риски, интерпретировать результаты и формировать стратегии, учитывая сложность и динамику современного экономического мира. [4]

Основные алгоритмы машинного обучения для прогнозирования Линейная и логистическая регрессия – это два основных алгоритма машинного обучения, используемые для прогностического моделирования значения зависимой переменной на основе одного или нескольких независимых параметров.

Первый, линейный вариант используют для прогнозирования непрерывных значений зависимой переменной [5]. Например, её можно использовать для оценки будущих продаж продукта в следующем месяце на основе показателей текущих продаж, цены продукта и уровня конкуренции.

Второй, логистический вариант регрессии используют для прогнозирования дискретных значений зависимого параметра. Например, её можно использовать для оценки вероятности того, что клиент совершит покупку в следующем месяце на основе его текущих покупок, уровня удовлетворенности и наличия промоакций.

Метод опорных векторов (SVM) – это методика машинного обучения, используемая для классификации и регрессии. Она основана на поиске гиперплоскости, разделяющей данные двух классов с максимально возможной шириной.

Метод опорных векторов можно использовать для решения различных задач в экономике и менеджменте. Несколько примеров сфер использования приведём ниже.

1. Оценка риска банкротства.

2. Классификация клиентов

3. Прогнозирование спроса

4. Распознавание мошенничества

Нейронные сети и деревья решений. Эти механизмы являются важными инструментами в области машинного обучения, каждый характеризуется своими уникальными возможностями и направлениями применения.

Прогнозирование ключевых экономических показателей

Валовой внутренний продукт (ВВП) – ключевой макроэкономический показатель. Для его прогностического моделирования применяются методы машинного обучения, в частности линейная регрессия, нейронные сети и др.

В исследовании «Прогнозирование ВВП: машинное обучение, линейная или авторегрессия?» опубликованном в журнале «Frontiers in Artificial Intelligence» [9], авторы сравнивают прогностическую силу разных моделей для прогнозирования реального ВВП США, используя квартальные данные с 1976 по 2020 год.

Инфляция – также важнейший макроэкономический показатель. Для её прогнозирования также применяют разнообразные методики машинной тренировки: линейная и логистическая регрессия, нейронные сети, деревья решений и др. [10].

Заключение

Прогнозирование экономических трендов – ключевой инструмент для планирования и стратегического принятия решений в экономике 21-го века. Всё большее внедрение машинного обучения в эту область открывает новые возможности для повышения точности и эффективности предсказаний.

Различные его алгоритмы, включающие линейную и логистическую регрессию, нейронные сети и деревья решений, демонстрируют свою способность эффективно анализировать и обрабатывать большие объемы данных, выявляя сложные закономерности и тенденции. Его использование для предсказания значений ВВП, инфляции, процентных ставок и валютных курсов показывает, как эти технологии могут служить мощным инструментом в руках экономистов и аналитиков в 2024 году.

Существующие и будущие исследования в области ML-прогнозирования имеют важное значение для развития экономики на всех уровнях. Они создают условия для значительного повышения эффективности принятия экономических решений, снижения рисков ведения деятельности, и, тем самым, выступают предпосылками, способствующими устойчивому росту экономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение методов машинного обучения в области прогнозирования объемов продаж с учетом изменяемых показателей / Ю. И. Валиахметова, Э. И. Идрисова // StudNet – 2020. – № 10.

2. Машинные прогнозы [Электронный ресурс] / М. Тищенко. – 2020.

3. МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ КАК КОНКУРЕНТНОЕ ПРЕИМУЩЕСТВО ПРЕДПРИЯТИЯ / И. А. Романов // Московский экономический журнал. – 2022. – № 3.

4. Понимание методов прогнозирования на основе машинного обучения: структура декомпозиции и исследовательские возможности / К. С. Бойер // Международный журнал прогнозирования. – 2022. –Том. 38, Выпуск 4. – ПП. 1555–1561.

5. Линейная регрессия для машинного обучения [Электронный ресурс] / Д. Браунли. – 2023 г.

6. Математика алгоритма машины опорных векторов (SVM) [Электронный ресурс]. – 2023 г.

7. Краткий обзор алгоритма машинного обучения Метод Опорных Векторов (SVM), – 2018.

8. Нейронные сети как деревья решения [Электронный ресурс] / Н. Упадья. – 2018.

9. Прогнозирование ВВП: машинное обучение, линейная или авторегрессия? Дж. Маккарроне, Дж. Морелли, С. Спадаччини. – 2021.

10. Прогнозирование индекса потребительских цен с использованием подхода машинного обучения: пример США / Т.-Т. Нгуен, Х.-Г. Нгуен, Дж.-Я. Ли, Ю.-Л. Ванг, Ч.-Ш. Цай // Гелион. – 2023.

11. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕГИОНАЛЬНОЙ ИНФЛЯЦИИ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ / И. А. Астраханцева, А. С. Герасимов, Р. Г. Астраханцев // Известия ВУЗов ЭФиУП. – 2022. – № 4 (54).

12. 7 причин, почему прогнозирование с помощью машинного обучения лучшими традиционными методами [Электронный ресурс] / К. Виснески. – 2023.

Секция X
Современные проблемы образования

Л. Е. Бритвина (Великий Новгород)
lyubov.britvina@novsu.ru

ДОП «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА МЕДИЦИНСКИХ ДАННЫХ»: ОПЫТ ВНЕДРЕНИЯ [1]

В настоящее время в медицине собираются огромные объемы данных, разнообразных как по формату и качеству представления, так и по возможностям их анализа. Математический аппарат широко применяется для решения классификационных и диагностических задач, поиска закономерностей и причинно-следственных связей, проверки научных гипотез. Развитие статистических методов, методов машинного обучения и анализа больших данных с одной стороны открывает новые возможности для анализа медицинских данных, с другой стороны повышает уровень требований к математической подготовке специалистов, занимающихся непосредственно данным анализом.

При составлении программы дополнительного образования «Математические основы анализа медицинских данных» учитывались современные тенденции в области анализа данных, особенности собираемых медицинских данных, материально-техническое и программное обеспечение, которым располагает образовательное учреждение.

Программа дополнительного образования «Математические основы анализа медицинских данных» реализуется в Новгородском государственном университете имени Ярослава Мудрого (НовГУ), начиная с весеннего семестра 2022–2023 учебного года. В апробации программы приняли участие магистранты первого и второго года обучения направления подготовки 09.04.01 "Информатика и вычислительная техника". В настоящее время готовятся материалы для создания сопровождающего курса на платформе дистанционного обучения НовГУ (https://do.novsu.ru/).

В докладе будут представлены особенности программы дополнительного образования, её возможности, используемые технологии и перспективы развития. Рассматриваются также трудности, выявленные на этапе апробации, и предлагаются возможные пути их преодоления.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по программе создания и развития центра мирового уровня «Цифровой биодизайн и персонализированное здравоохранение» в рамках проекта № 075-15-2022-306.

С. А. Докучаев, Г. С. Костецкая (Ростов-на-Дону)
galina.kostezkaya@gmail.com

Об организации проектной деятельности студентов на практических занятиях по высшей математике

ФГОС ВО по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» относит проектный тип к одному из основных типов задач профессиональной деятельности бакалавров [1]. С целью наилучшей подготовки выпускников к решению задач профессиональной деятельности в учебные планы многих вузов по данному направлению вводятся проектные практикумы. Метод проектов позволяет устанавливать интеграционные связи между дисциплинами, предусмотренными учебным планом специальности, что обеспечивает целостность знаний, предоставляет возможность профессиональной подготовки студентов в новых социально-экономических условиях [2]. Нам представляется, что проектная деятельность студентов может быть существенно расширена за счет ее активного использования на практических занятиях по высшей математике. Не отрицая важности контрольных работ для оценки практических навыков и умений обучающихся, мы бы хотели обратить внимание на ряд очевидных преимуществ проектного метода:

1) студенты получают возможность глубже погрузиться в изучаемую тему, так как они решают реальные задачи, а не просто выполняют задания из учебника;

2) проекты позволяют обучающимся применить свои знания языков программирования для решения математических задач, что делает учебный процесс более реалистичным и интересным;

3) решение математических задач в рамках проекта требует от студентов креативного и самостоятельного поиска решений, способствует развитию их аналитических способностей;

4) участие в проектной деятельности может быть более мотивирующим для студентов, так как они видят результаты своего труда;

5) защита проекта с помощью презентации позволяет обучающимся развить навыки публичного выступления, повышает уверенность и умение аргументировать свои мысли перед аудиторией.

Авторами был использован проектный метод при проведении практических занятий по высшей математики во втором семестре первого курса. Студентам предлагалось выполнить проектные задания по темам «Решение дифференциальных уравнений» и «Исследование сходимости степенных рядов». Представленные проекты оценивал не только преподаватель, но и сами обучающиеся, что в значительной степени повысило мотивацию студентов. Таким образом, проектное обучение делает студентов активными участниками своего образования, обеспечивает эффективное усвоение математических знаний и развитие компетентности, необходимой для будущей профессиональной деятельности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника». Утв. приказом Минобрнауки России от 19.09.2017 № 929 [Электронный ресурс]: – URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-09-03-01-informatika-i-vychislitelnaya-tehnika-929

2. Тургунбаев, Р. М. Метод проектов в подготовке будущих учителей математики / Р. М. Тургунбаев, И. К. Рахимов. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2014. — № 10 (69). — С. 425–428. — URL: https://moluch.ru/archive/69/11762/ (дата обращения:14.05.2024).

Е. А. Киселева (Рязань)
kiseleva-liza@mail.ru

ПРОБЛЕМЫ ВВЕДЕНИЯ НОВОГО ПРЕДМЕТА «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Каждая историческая эпоха ставит перед математической наукой и образованием свои требования. Важно, чтобы содержание математического образования в школе соответствовало актуальным научным знаниям и подходам. Необходимо постоянно обновлять учебные программы, чтобы давать возможность новым научным идеям и концепциям находить свое отражение в учебном процессе.

Внедрение нового предмета «Вероятность и статистика» в школьный курс столкнулось с несколькими проблемами, прежде всего, из-за неподготовленности учителей, которые не имеют опыта успешной реализации вероятностно-статистической линии в учебном процессе по математике, а также из-за отсутствия единой методики преподавания.

Требуется заботиться о том, чтобы базовые понятия статистики и вероятности стали понятными и привычными для учителей математики, которым сложно перестроиться с преподавания абстрактных фактов на использование математики при решении практических задач.

Сегодня вопрос о введении теории вероятностей является одним из ключевых аспектов модернизации математического образования. Это связано с ролью, которую играют знания в области вероятности и статистики в подготовке человека к современным вызовам.

На данный момент существует острая проблема в методическом оснащении образовательного процесса. На уроках используется УМК, авторами которого являются И. Р. Высоцкий и И. В. Ященко. У педагогов нет возможности выбора УМК, а данный учебник сталкивает учителя с некоторыми трудностями.

Также необходимо увеличить оказание консультационной помощи в повышении предметной подготовки и переподготовки учителей. Для успешной реализации нового предмета необходимо наличие специалистов, обладающих значительным опытом работы и глубокими знаниями в области математики, анализа данных и статистики.

Помимо этого педагогические работники столкнулись с сопротивлением со стороны учеников и родителей. Некоторые учащиеся и их родители оказались неготовыми к введению нового предмета из-за нехватки понимания значимости и актуальности изучения вероятности и статистики.

Для успешного введения нового предмета «Вероятность и статистика» в образовательный процесс средней школы необходимо учитывать вышеперечисленные проблемы и предпринимать соответствующие действия для их решения.

Е. А. Киселева, Е. В. Янина (Рязань)
kiseleva-liza@mail.ru, yekaterina.yanina.83@mail.ru

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ШКОЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Закон Российской Федерации от 29.12.2012 № 273–ФЗ «Об образовании» гласит: «Под образованием понимается целенаправленный процесс воспитания и обучения в интересах человека, общества, государства, сопровождающийся констатацией достижения гражданином (обучающимся) установленных государством образовательных уровней (образовательных цензов)».

Мы находимся в эпохе стремительного развития новых технологий, прогресса в науке и технике, изменений в культуре и обществе, которые произошли за последние десятилетия, и образовательная система должна готовить специалистов к этим новым вызовам, так как с самого начала школьного обучения дети получают огромное количество информации и знаний, которые устарели и перестали быть актуальными.

Каково будущее российской системы образования? Будут ли учтены текущие проблемы современного образования при ее реформировании? Будет ли уделено внимание мнению педагогов, студентов, школьников и их родителей? На эти вопросы пока нет ответа, однако, мы постараемся выявить проблемы, с которыми сталкиваются как преподаватели, так и учащиеся.

В области школьного образования анализ различных информационных источников, научных статей, мнений родителей и педагогов, а также собственных рассуждений позволил выявить ряд проблем:

- острая нехватка квалифицированных учителей;
- для молодых учителей основной причиной является потеря уважения к профессии учителя;
- непонимание и разногласие между родителями и учителями;
- низкий уровень заработной платы;
- отсутствие мотивации к обучению у школьников всех возрастов;
- проблема увлечениями гаджетами школьников;
- несовершенство образовательных программ и стандартов;
- высокая загруженность учителей отчетной документацией и многие другие проблемы.

Эти проблемы можно и нужно решить. Важно, чтобы все эти вопросы решались на социальном уровне, и ситуация, скорее всего, улучшится, если это будет сделано.

Е. Н. Сюсюка, Е. В. Мазанько (Новороссийск)
sollain66@rambler.ru, mailsl@mail.ru

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ОБУЧЕНИИ ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ В ГМУ ИМ. АДМ. Ф. Ф. УШАКОВА

Любому среднестатистическому студенту часто приходится испытывать состояние стресса из-за того, что учебная нагрузка и объём учебного материала растет, требования к мышлению умению решать практические задачи творческому подходу увеличиваются, а времени и способности охватить все учебные задачи катастрофически не хватает.

Любой преподаватель современного ВУЗа также озадачен уменьшением аудиторных часов, выделяемых для обучения студентов конкретному предмету. Возникает необходимость оптимизации совместных усилий как преподавателя и студентов, так и преподавателей смежных дисциплин, которые формируют одни и те же компетенции согласно ФГОС.

Реализовать это можно различными методами. В Государственном морском университете им. адм. Ф.Ф. Ушакова преподавателями кафедры «Высшая математика и физика» активно используются следующие технологии:

- метод укрупнения дидактических единиц;
- дифференцированный подход;
- практико-ориентированный подход;
- реализация межпредметных связей;
- применение цифровых технологий;
- привлечение к проектной и научной деятельности студентов;
- промежуточное тестрирование.

Применение такого комплексного подхода к оптимизации учебного процесса позволяет создать прочный фундамент знаний, необходимых для формирования профессиональной компетентности инженерных специалистов морской отрасли.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сюсюка Е. Н.* Межпредметные связи в образовательном процессе по физике и математике в техническом университете. / Е. Н. Сюсюка, Е. В. Мазанько // Вестник государственного морского университета имени адмирала Ф.Ф. Ушакова. – 2024. – № 1(46). – С. 141–144.

2. *Сюсюка, Е. Н.* Реализация межпредметных связей математики и физики на примере решения некоторых физических задач / Е. Н. Сюсюка, Е. Х. Аминева // Вестник государственного морского университета имени адмирала Ф.Ф. Ушакова. – 2023. – № 2(43). – С. 164–169. – EDN TWPOCK

3. *Сюсюка Е. Н.* Дифференциальные уравнения в решении задач по физике / Е. Н. Сюсюка, Д. О. Тонконог // Вестник государственного морского университета имени адмирала Ф.Ф. Ушакова. — 2023. — № 2(43). — С. 162–164. -EDN. EDN: CYTSJB

4. *Зеленков, Г. А.* Использование компьютерных технологий для математических исследований с учащимися / Г. А. Зеленков, Е. В. Мазанько // Вестник государственного морского университета имени адмирала Ф. Ф. Ушакова. – 2022. – № 2(39). – С. 113–118. – EDN XIFACU

5. *Сюсюка, Е. Н.* Визуализация сложения колебательных движений методом информационных технологий / Е. Н. Сюсюка, А. А. Колесников, А. Е. Чупин // Эксплуатация морского транспорта. – 2020. – № 2(95). – С. 138–150. – DOI 10.34046/aumsuomt95/24. – EDN ZFXOKK

Содержание

Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения 3

Ермоленко Г. Ю., Мкртычев О. В., Степанова М. А. Модифицированное дискретное преобразование Фурье и его некоторые свойства 4

Поцейко П. Г., Ровба Е. А. О суммах Валле Пуссена в рациональной аппроксимации сопряженной функции на отрезке 5

Трынин А. Ю. О суммировании тригонометрических рядов Фурье с помощью синк-аппроксимаций 6

Щербаков В. И. О поточечном признаке сходимости Дини рядов Фурье по системам типа Хаара и Уолша 6

Секция I Дифференциальные уравнения 8

Андреева И. А. Методология исследования иерархических семейств полиномиальных динамических систем 9

Асхабов С. Н. Уравнения с интегралами дробного порядка и монотонной нелинейностью на действительной оси 10

Балашов М. В. О выживании решение динамической системы 11

Бритвина Л. Е., Игнатенко В. В. Решение уравнения диффузии с помощью обобщённых свёрток преобразования Бесселя 12

Буробин А. В. Задача Коши для систем уравнений дробного порядка 12

Джабраилов А. Л. Краевые задачи с переопределенными краевыми условиями, порожденными точками сингулярностей 14

Ермоленко Г. Ю. Решение основных краевых задач уравнений математической физики методом опорных функций 15

Кузнецова М. А. Асимптотики решений системы уравнений первого порядка на полуоси 16

Skubachevskii A. L. Global classical solutions of Vlasov–Poisson system for two-component plasma **17**

Солонуха О. В. Существование и единственность решения эллиптического дифференциально-разностного уравнения с p–лапласианом и симметрическим оператором сдвигов **18**

Секция II Теория функций 19

Авсянкин О. Г. Канонические интегральные операторы с однородными ядрами и порождаемые ими Банаховы алгебры **20**

Бабаев А. Б. Шкала анизотропных пространств Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости **21**

Гиль А. В. Некоторые свойства функций из пространств BMO в R^n. **22**

Подклетнова С. В. Интегральные представления гипергеометрических функций двух независимых аргументов **24**

Старовойтов А. П., Рябченко Н.В. Е. П., Оснач Т. М. О существовании аппроксимаций Паде–Чебышёва аналитических функций **25**

Штепин В. В. , Штепина Т. В. Модель представлений основной серии группы Лоренца в функциях на пространстве Лобачевского **26**

Секция III Дискретная математика, алгебра, геометрия 27

Гусейн-Заде С. М. Вещественные и другие аналоги рядов Пуанкаре нормирований **28**

Казак В. В., Солохин Н. Н. О краевой задаче Пуанкаре в теории изгибаний поверхности с краем **29**

Штепин В. В. , Штепин Д. В. О свойствах геометрических представлений конечных групп **30**

Секция IV Теория вероятностей и стохастические методы 31

Кондратенко А. Е., Копытько М. Ю., Соболев В. Н. О некоторых условиях сходимости дробной части сверток целочисленных случайных величин к равномерному распределению 32

Елизарова Н. А., Соболев В. Н., Кондратенко А. Е. К вопросам сходимости в ЗБЧ 33

Соболев В. Н., Кондратенко А. Е., Елизарова Н. А. Об одном вероятностном свойстве фейеровских пар или об одном классе характеристических функций вероятностных распределений 34

Секция V Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии 35

Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. О ВЛИЯНИИ СОЧЕТАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПАРАМЕТРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА И ТРЕНИЯ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ 36

Зеликин Н. В. Категорные методы, новые перспективы 37

Litvinov V. L., Litvinova K. V. Vibrations of a beam with a moving boundary, lying on an elastic base 39

Меликян М. В. О тепловом эхо в одномерном закрепленном кристалле 40

Переварюха А. Ю.,Погодина А. В.,Данилова Д. А. Модели циклической инвазионной активности с возмущенным запаздыванием 41

Сюсюка Е. Н. Алгоритм восстановительной обработки судового валопровода мобильным станком 42

Секция VI Математическое программирование и теория игр 44

Агиев Х. Р. Логистическое взаимодействие железной дороги и морского порта 45

Агиева М. Б. Статические модели управления качеством в организационных системах в условиях коррупции 46

Секция VII Информационно-коммуникационные технологии в науке, образовании и производстве 47

Ермакова И. В. Использование новейших технологий для получения новых продуктов питания. Еда будущего? 48

Жук А. С. Множества достижимости в задачах предотвращения столкновений судов 49

Самойленко Н. Э., Ципина Н. В., Воронин Д. Р., Болычев А. Я., Ципина К. Д. Информационные технологии в задачах пластин жидкостного охлаждения 50

Сидоренко А. В. Моделирование перемещения мобильного робота с огибанием препятствий 51

Шубарин М. А. Создание динамических документов с использованием языка разметки RMarkdown 52

Секция VIII Цифровая экономика: тенденции развития 53

Савин С. В., Мурзин А. Д. Прогнозирование экономических трендов с помощью алгоритмов машинного обучения 54

Секция X Современные проблемы образования 57

Бритвина Л. Е. ДОП «Математические основы анализа медицинских данных»: опыт внедрения 58

Докучаев С. А., Костецкая Г. С. Об организации проектной деятельности студентов на практических занятиях по высшей математике 59

Киселева Е. А. Проблемы введения нового предмета «вероятность и статистика» в образовательный процесс средней школы **61**

Киселева Е. А., Янина Е. В. Современные проблемы школьного образования **62**

Сюсюка Е. Н., Мазанько Е. В. Методы оптимизации учебного процесса при обучении физике и математике в ГМУ им. Адм. Ф.Ф. Ушакова **63**