Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский центр фундаментальной и прикладной математики (МЦФПМ)
Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ (РНОМЦ ЮФУ)
Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ
НОУ Учебный центр «Знание»

XXXI Международная конференция Математика. Экономика. Образование.

XV Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения.

Конференция и симпозиум посвящены светлой памяти профессора Бориса Ивановича Голубова

27 мая – 3 июня 2025 г.
Пансионат «Метроклуб»

Материалы

http://conf-symp.sfedu.ru, e-mail: conf-symp@mail.ru

УДК 330.4+504+37 1Л4
XXXI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Ростов н/Д, 2025. — 56 с.
ISBN 978-5-6041226-0-0

Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к экономике, экологии, естественным наукам. Исследуются аспекты современного образования, без которых невозможно решение этих проблем. Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Международный симпозиум
Ряды Фурье и их приложения

Б. Б. Беднов (Москва)
bednov_b_b@staff.sechenov.ru

ЧЕБЫШЁВСКИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В L_1 НА ТОРЕ

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Подпространство $Y \subset X$ называется чебышевским, если для каждого $x \in X$ существует и единствен такой элемент $y \in Y$, что $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in Y\}$.

Обозначим $Y_M = \overline{\operatorname{span}\{e^{2\pi i \mathbf{l}\mathbf{t}}\}}_{\mathbf{l}\in M}$ — замыкание линейной оболочки комплексных экспонент $e^{2\pi i \mathbf{l}\mathbf{t}}$ с спектром показателей $\mathbf{l}$ из некоторого множества $M \subset \mathbb{Z}^2$ в пространстве $L_1[0,1]^2$ комплекснозначных функций 2 действительных переменных, суммируемых на $[0,1]^2$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in [0,1]^2$.

Напомним, что пространство Харди H_1 изометрически изоморфно подпространству $\overline{\operatorname{span}\{e^{2\pi i n t}\}}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_1[0,1]$.

В 1940 году Дуб [1] доказал, что пространство Харди H_1 является чебышевским подпространством в пространстве комплекснозначных суммируемых на $[0,1]$ функций $L_1[0,1]$.

В 1974 году Кахан [2] описал все чебышевские подпространства Y_M в $L_1[0,1]$.

Теорема A ([2]). *Пусть $M \subset \mathbb{Z}$. Подпространство Y_M чебышевское в $L_1[0,1]$ тогда и только тогда, когда M — бесконечная (хотя бы в одну сторону) арифметическая прогрессия с нечетной разностью.*

В докладе будут охарактеризованы все такие множества $M \subset Z^2$, что Y_M — чебышёвское подпространство в $L_1[0,1]^2$, в частности, будет рассмотрен случай, когда M — подрешётка в $\mathbb{Z}^2$, то есть множество вида $\{k_1\overline{a} + k_2\overline{b} : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}^2\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doob J.L.* A minimum problem in the theory of analytic functions // Duke Math. J. 1941. № 3 V. 8. P. 413–424.

2. *Kahane J.-P.* Best approximation in $L^1(T)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. № 5. P. 788–804.

Н. В. Лактионова, К. В. Руновский (Севастополь)
k_laktionova07@mail.ru , k_runov@mail.ru

ПРИБЛИЖЕНИЕ «УГЛОМ» И ОБОБЩЕННАЯ ГЛАДКОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Линейные операторы $A_\sigma(\lambda) : e^{ikx} \longrightarrow \lambda(k/\sigma)e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}^d_+$ ($\sigma_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$), $kx = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$, $k/\sigma = (k_1/\sigma_1, \ldots, k_d/\sigma_d)$, изучаются в шкале L_p, $1 \le p \le +\infty$, периодических функций в терминах наилучших приближений "углом" (см. [1])

$$Y_\sigma(f)_p \,=\, \inf\left\{ \left\| f - \sum_{j=1}^{d} g_j \right\|_p : g_j \,\in\, \mathcal{T}^{(j)}_{\sigma_j,\,p} \,, j = 1, \ldots, d \right\},$$

где $g_j \,\in\, \mathcal{T}^{(j)}_{\sigma_j,\,p}$ – множество функций из L_p, являющихся тригонометрическими полиномами порядка не выше σ_j по переменной x_j.

Скажем, что $\lambda \in \mathcal{G}$, если λ непрерывна на $\mathbb{R}^d$, $\lambda(-t) = \overline{\lambda(t)}$, $\lambda(t) = 0$ при $t_1 \cdot \ldots \cdot t_d = 0$, $|\mathcal{J}\lambda(\pm t_1, \ldots, \pm t_d)| = |\mathcal{J}\lambda(t)|$ для $t \in \mathbb{R}^d_+$, где $\mathcal{J}$ – Re или Im, при этом $\mathcal{D}\lambda \equiv \partial^{\,d}\lambda/\partial t_1 \ldots \partial t_d \in L^{loc}_1(\mathbb{R}^d_+)$.

Теорема 1. *Для* $d \ge 1$, $1 < p < +\infty$, $\lambda \in \mathcal{G}$ $(t \cdot \sigma = (t_1\sigma_1, \ldots, t_d\sigma_d))$

$$\|A_\sigma(\lambda)f\|_p \le c(d) \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} |\,\mathcal{D}\lambda(t)\,|\, Y_{t\cdot\sigma}(f)_p\, dt\,,\ f \in L_p\,,\ \ \sigma \in \mathbb{R}^d_+\,,$$

где положительная постоянная $c(d)$ *не зависит от* f, σ *и* λ .

Обозначим $\mathcal{D}^{(\varepsilon)}_j = t_1^{\varepsilon_1 - 1} \ldots t_j^{\varepsilon_j - 1} \partial^{|\varepsilon|_j}/\partial t_1^{\varepsilon_1} \ldots \partial t_j^{\varepsilon_j}$, $|\varepsilon|_j = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j$, $j = 1, \ldots, d$, $\mathcal{D}^{(\varepsilon)}_0$ – тождественный оператор, $\mathcal{D}^{(\varepsilon)}_d = \mathcal{D}^{(\varepsilon)}$ для $\varepsilon \in \mathbb{Z}^d_3$ с $\varepsilon_j = 0, 1, 2$. Скажем, что $\lambda \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$, если $\partial^{\,2d}\lambda/\partial t_1^2 \ldots \partial t_d^2 \in L^{loc}_1(\mathbb{R}^d_+)$ и $\lim\limits_{t_j \to +0} t_j\, \partial/\partial t_j(\mathcal{D}^{(\varepsilon)}_{j-1}\lambda(t)) \,=\, 0$ для $\varepsilon \in \mathbb{Z}^d_3$ и $j = 1, \ldots, d$.

Теорема 2. *Для* $d \ge 1$, $1 \le p \le +\infty$, $\lambda \in \mathcal{G}_1$

$$\|A_\sigma(\lambda)f\|_p \le c(d) \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{Z}^d_3} \left|\,\mathcal{D}^{(\varepsilon)}\lambda(t)\,\right| Y_{t\cdot\sigma}(f)_p\, dt\,,\ f \in L_p\,,\ \ \sigma \in \mathbb{R}^d_+\,,$$

где положительная постоянная $c(d)$ *не зависит от* f, σ *и* λ .

Получен ряд следствий для обобщенных производных (см. также [2] в случае $d = 1$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Потапов М. К.* Приближение «углом» и теоремы вложения // Math. Balkanica. 1972. № 2. С. 183–198.

2. *Руновский К. В.* Операторы мультипликаторного типа и приближение периодических функций одной переменной тригонометрическими полиномами // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 2. С. 106–137.

И. Я. Новиков (Воронеж)
igor.nvkv@gmail.com

ОТКРЫТЫЕ И ЗАКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ ПРОБЛЕМЫ ИНТЕРВАЛОВ

Автором работы в 1992 году было сформулировано утверждение, являющееся усилением известной теоремы Ж. Марцинкевича [1] о сходимости одноименного интеграла. Это утверждение известно под разными названиями: проблема интервалов, проблема отрезков, проблема пересечений отрезков. Приведём её формулировку.

Гипотеза (проблема интервалов) (И. Я. Новиков [2]).

Существует константа $C > 0$, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$, расположения отрезков $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ и их длин $\{\delta_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+$, такая, что мера Лебега множества

$$\Omega(a_1, \ldots, a_n, \delta_1, \ldots, \delta_n) :=$$
$$\{t \in \mathbb{R} : \exists k \in \{1, \ldots, n\},\ card\{i : t \in (a_i, a_i + k\delta_i)\} \geq k\}$$

удовлетворяет оценке:

$$\mu\left(\Omega(a_1, \ldots, a_n, \delta_1, \ldots, \delta_n)\right) \leq C \cdot \sum_{i=1}^{n} \delta_i?$$

Доклад содержит информацию о современном положении дел в поставленной задачи, положительно решенной только для частных случаях в работах Тихомирова К. Е. [3-4] и Асташкина С. В. [5].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Марцинкевич Я.* Sur les séries de Fourier // Fund. Math. 1936. T. 27. C. 38–69.

2. *Новиков И.Я.* A list of open problems // Israel Math. Conf. Proc. 1992. T. 5. C. 290.

3. *Тихомиров К.Е.* О мере объединения множества точек, покрытых k раз k-кратными растяжениями интервалов // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественн. сер. 2006. № 6/1(46). С. 78–93.

4. *Tikhomirov K.E.* A strengthening of a theorem of Marcinkiewicz // Marcinkiewicz centenary volume. Banach Center Publications. Warszawa: Inst. Math. Polish Acad. Sci., 2011. C. 369–383.

5. *Асташкин С.В., Галич Д.Н.* Оценка меры k-кратных пересечений k-кратно растянутых отрезков // Изв. вузов. Математика. 2022. № 10. С. 79–85.

К. В. Руновский, Н. В. Лактионова (Севастополь)
k_runov@mail.ru , k_laktionova07@mail.ru

СФЕРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ОБОБЩЕННАЯ ГЛАДКОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Линейные операторы $A_\sigma(\lambda) : e^{ikx} \longrightarrow \lambda(|\,k\,|/\sigma)e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $\sigma > 0$, где λ – непрерывная на $[0, +\infty)$ функция, $kx = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$, $|\,k\,| = (x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{1/2}$, изучаются в шкале L_p, $1 \le p \le +\infty$, периодических функций в терминах наилучших сферических приближений

$$E_\sigma(f)_p = \inf_{T \in \mathcal{T}_\sigma} \|\, f - T \,\|_p \,,\ \mathcal{T}_\sigma = \Big\{ T(x) = \sum_{|\,k\,| \le \sigma} c_k e^{ikx} : c_{-k} = \overline{c}_k \Big\} .$$

Скажем, что $\lambda \in C^l[a, +\infty)$, $l \in \mathbb{N}$, $a \ge 0$, если $\lambda(r) = 0$ для $0 \le r \le a$, $\lambda^{(l)}$ а. н. внутри $(a, +\infty)$, и $\lim\limits_{r \to a+0} (r-a)^k \lambda^{(k)}(r) = 0\,,\ k = 0, \ldots, l\,.$

Теорема. *Пусть* $d \ge 1$, $1 \le p \le +\infty$, $\lambda \in C^l[a, +\infty)$, *где* $l = [(d-1)/2] + 1$, $a \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$. *Тогда для* $f \in L_p$ *и* $\sigma > 0$

$$\begin{aligned}\|A_\sigma(\lambda) f\|_p \quad \le \quad & c(d) \Big(\int\limits_a^{+\infty} \Big(\frac{r}{r-a} \Big)^{(d-1)/2} \Big(\sum_{k=1}^{l+1} (r-a)^{k-1} |\lambda^{(k)}(r)| \Big) \\ & E_{r\sigma}(f)_p \, dr + \int\limits_a^{2a} \Big(\frac{r}{r-a} \Big)^{(d-1)/2} \frac{|\lambda(r)|}{r-a} \, E_{r\sigma}(f)_p \, dr \Big) \,,\end{aligned}$$

где положительная постоянная $c(d)$ *не зависит от* f, σ, a *и* λ .

Полученный результат находит множество приложений в различных разделах теории приближений и гладкости. В частности, на его основе установлены достаточные условия для мультипликаторов и существования обобщенных производных. Для $d = 1$ теорема была доказана в [1], некоторые её следствия описаны в [2, 3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Руновский К. В.* Операторы мультипликаторного типа и приближение периодических функций одной переменной тригонометрическими полиномами // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 2. С. 106–137.

2. *Лактионова Н. В., Руновский К. В.* Обратные теоремы приближения периодических функций с высокой обобщенной гладкостью // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 2. С. 312–315.

3. *Лактионова Н. В., Руновский К. В.* Прямые теоремы о приближении периодических функций с высокой обобщенной гладкостью // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 3. С. 477–480.

М. А. Кухлич, Н. В. Рябченко, А. П. Старовойтов
(Гомель, Республика Беларусь)
kuhlich@gmail.com, nmankevich@tut.by, svoitov@gsu.by

АСИМПТОТИКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ЯКОБИ

Рассмотрим систему тригонометрических рядов

$$G_\gamma(z;\lambda_j)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p}\,\cos px,\quad j=1,\dots,k\,, \tag{1}$$

где параметр $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_-=\{0,-1,-2,\dots\}$, $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_p=\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\overrightarrow{\lambda}=\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — корни уравнения $\lambda^k=1$. Пусть $n,m_1,\dots,m_k$ — целые неотрицательные числа, $\overrightarrow{m}=(m_1,\dots,m_k)$, $m=\sum_{p=1}^k m_p$, $n_j=n+m-m_j$, а

$$\pi_j^t(z;\mathbf{G}_\gamma)=\pi^t_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{G}_\gamma(\overrightarrow{\lambda})=\frac{P_j^t(z;\mathbf{G}_\gamma)}{Q_m^t(z;\mathbf{G}_\gamma)}\ \ (j=1,\dots,k)$$

— тригонометрические аппроксимации Эрмита-Якоби системы (1) (определение см. в [1]).

Теорема 1. *Если $k=1$, то при любом фиксированном x, $n=m$, и $n\to+\infty$*

$$G_\gamma(x;1)-\pi^t_{n,n}(x;G_\gamma)=$$
$$=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{n}}\ \frac{1}{2^{2n+\gamma}}\ \frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}}\ Re\left\{e^{i(2n+1)x}e^{\cos x+i\sin x}(1+O(1/n))\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $k\geqslant 2$. Тогда при любом фиксированном x, $n=m_1=\ldots=m_k$, $n\to+\infty$, и $j=1,\dots,k$*

$$G_\gamma(x;\lambda_j)-\pi_j^t(x;G_\gamma)=$$
$$=(-1)^n\,(k{+}1)^{-k(\gamma-1)}\ \frac{B_k(n)}{(\gamma)_{kn+n}}\ Re\left\{e^{i(kn+n+1)x}\lambda_j^{n+1}e^{\lambda_j(1-x_1)e^{ix}}(1+O(1/n))\right\},$$

где

$$B_k(n):=\sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}}\left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}\right)^n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Старовойтов А. П, Е. П. Кечко, Т. М. Оснач* О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита-Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышёва // Журнал Белорусского государственного университета. Матем. Информ. 2023. № 2. С. 6–17.

А. Ю. Трынин (Саратов)
tayu@rambler.ru

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЁННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим задачу Дирихле на прямоугольнике $P = [0, L_1] \times [0, L_2]$ с уравнением Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad u(x, y)\Big|_{\partial(P)} = \varphi(x, y),$$

где функции f и φ являются непрерывными, каждая на своей области определения, за исключением быть может вершин P, где допускаются разрывы первого рода. Пусть $\hat{\lambda}_m := \left(\frac{\pi m}{L_1}\right)^2$ и $\hat{U}_m(x) := \sqrt{\frac{2}{L_1}} \sin \frac{\pi m}{L_1} x$ $m, n = 1, 2, 3, \dots$ $0 < \epsilon < 1$, $j(n) := \left[n^{2\left(1+\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\right)}\right] + 1$, $\sigma_i, i = 1, 2$ определены в [1].

$$\widehat{u_{\lambda_n m}}(y) \equiv A_m \operatorname{ch}\left(\sqrt{\hat{\lambda}_m} y\right) + B_m \operatorname{sh}\left(\sqrt{\hat{\lambda}_m} y\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}_m}} \int_0^y \operatorname{sh}\left(\sqrt{\hat{\lambda}_m}(y - \tau)\right) \widehat{AT}^{\phi}_{n,m}[f(\cdot, \tau), \eta]\, d\tau.$$

$$\bar{u}_{\lambda_n}(x, y) = \sum_{m=0}^{j(n)} (\bar{A}_m \operatorname{ch}\left(\sqrt{\bar{\lambda}_m} y\right) + \bar{B}_m \operatorname{sh}\left(\sqrt{\bar{\lambda}_m} y\right)) \bar{U}_m(y),$$

$$u_{\lambda_n}(x, y) = \sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{u_{\lambda_n m}}(y) \hat{U}_m(x), \quad \bar{u}_{\lambda_n}(x, y) = \sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{\bar{u}_{\lambda_n m}}(y) \hat{\bar{U}}_m(x),$$

Теорема 1. *Обобщённое решение задачи (1) является пределом суммы*

$$\lim_{n\to\infty} u_{\lambda_n}(x, y) + \bar{u}_{\lambda_n}(x, y) = u(x, y)$$

Сходимость в (1) равномерная на $[\sigma_1 \tilde{\varepsilon}, \pi - \widetilde{\sigma}_1 \tilde{\varepsilon}] \times [\sigma_2 \tilde{\varepsilon}, \pi - \widetilde{\sigma}_2 \tilde{\varepsilon}]$, *а функционалы* $\widehat{AT}^{\phi}_{n,m}[\cdot, \eta]$ *и константы* $\sigma_1, \widetilde{\sigma}_1$ *определены в [1].*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Trynin A. Yu.* A Summation Method for Trigonometric Fourier Series Based on Sinc-Approximations // Journal of Mathematical Sciences, 2023. Volume 270, pages 842–858.

В. И. Щербаков (Жуковский Московской области)
kafmathan@mail.ru

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ Б. И.ГОЛУБОВА НА СИСТЕМАХ ТИПА ХААРА И ЕГО РАЗВИТИИ

посвящается светлой памяти Бориса Ивановича Голубова

Пусть $p_0 = 1$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с

$$p_n \geq 2 \text{ и } \sup_n p_n = \infty, \text{ а также } m_n = \prod_{k=0}^{n} p_k. \tag{1}$$

Б. И.Голубов [1] показал, что если $p_{n+1} > e^{m_n}$, то ряд Фурье по системе типа Хаара, порождённой последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, расходится в нуле. Тем самым было установлено, что основное свойство систем Хаара (равномерная сходимость рядов Фурье от любой непрерывной функции) на системы типа Хаара, вообще говоря, не распространяется, и поэтому называть их системой Хаара некорректно. В дальнейшем в [2] было показано, что расходимость рядов Фурье по системам типа Хаара от некоторой непрерывной функции в некоторой точке возможно и для любой удовлетворяющей (1) последовательности. Поэтому, учитывая, что Б.И.Голубов первым стал изучать системы типа Хаара, порождённые удовлетворяющей (1) последовательностью (для ограниченных последовательностей они исследовались ранее) и установил, что главное свойство систем Хаара на эти системы **не распространяется,** было бы справедливо называть эти системы **системами Голубова.**

Таким образом для систем Голубова нужно рассматривать аналоги признаков сходимости рядов Фурье. Они были рассмотрены в [3] (для признаков Дини), в [4] (для признака Дини-Липшица) и в [5] (для признака Жордана).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Голубов Б. И.* Об однгом классе полных ортонормальных систем // Сиб.мат.ж., IX, 1968, № 2, С.297—314.

2. *Щербаков В. И.* Расходимость рядов Фурье по обобщённым системам Хаара в точках непрерывности функции // Из.вуз.,мат.,2016, №1,С.49—68.

3. *Щербаков В. И.* Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара // Мат.зам., 2017,101,№3, С.446—473.

4. *Щербаков В.И.* Признак Дини-Липшица для обобщённых систем Хаара // Из.Сар.Ун.,Нов.сер., мат., мех., инф., 16,№1, 2016, С.435—448.

5. *Щербаков В. И.* Признак Жордана для систем типа Хаара // Из. вуз., мат.,2024, № 11, С. 61 — 80.

Секция I
Дифференциальные уравнения

И. А. Андреева, Т. О. Ефимова, Н. В. Кондратьева
(Санкт-Петербург)
andreeva_ia@spbstu.ru

На расширенной вещественной плоскости своих фазовых переменных методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем изучается класс полиномиальных динамических систем, поддающийся в процессе исследования естественному расщеплению на семейства и подсемейства ряда уровней иерархии, число которых для различных ветвей расщепления варьирует от 3 до 4. В процессе работы применены первое и второе преобразования Пуанкаре, в итоге рассмотрение фазовых портретов систем перенесено в замкнутый круг Пуанкаре. Исследованы конечные и бесконечно удаленные особые точки систем, образующих рассматриваемые семейства, предложены и успешно применены специфические методики их изучения. Приведены количественные данные по числу отличающихся в топологическом понимании типов фазового портрета для семейств, относящихся к различным уровням установленной иерархии, а также близкие к коэффициентным критерии появления каждого из типов фазового портрета.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Андреева И. А., Андреев А. Ф.* Андреева И.А., Андреев А.Ф. Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. III. // Вестник РАЕН. Том 19. № 2. Стр. 20–24 (2019).

2. *Андреева И. А., Ефимова Т. О., Кондратьева Н. В.* Аналитические и геометрические аспекты исследования семейства кубических динамических систем. Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. Вып. 6. Стр. 16–20 (2024).

3. *Andreeva I.* Qualitative Investigation of Some Hierarchical Family of Cubic Dynamic Systems. Lobachevskii Journal of Mathematics. 45(1), pp. 364–375 (2024).

С. Н. Асхабов (Грозный)
askhabov@yandex.ru

СТРОГАЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАТОРА С ПОЛЯРНЫМ ЯДРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА [1]

В вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$, $p>1$, с обычной нормой $\|\cdot\|_p$ изучается оператор I^α с полярным ядром (оператор типа потенциала). Найдены условия при которых он действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$, $p'=p/(p-1)$, и является строго положительным и потенциальным (т.е. представляет собой градиент некоторого функционала). Эти условия используются при исследовании нелинейных уравнений, содержащих оператор I^α. При $p=2$ положительность оператора I^α хорошо известна. Обозначим через $\Gamma(\alpha)$ гамма-функцию Эйлера.

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и* $\frac{2}{1+\alpha}\le p<\infty$. *Тогда оператор*

$$\big(I^\alpha u\big)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b\frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}$$

действует ограниченно из $L_p(a,b)$ *в* $L_{p'}(a,b)$ *и является строго положительным потенциальным оператором, причем для любого* $u\in L_p(a,b)$ *выполняются неравенства:*

$$\|I^\alpha u\|_{p'}\le\frac{(b-a)^{\alpha+(p-2)/p}}{\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}\|u\|_p\quad\text{при}\quad p\ge 2,\tag{1}$$

$$\langle I^\alpha u,u\rangle\equiv\int\limits_a^b\big(I^\alpha u\big)(x)\cdot u(x)\,dx\ge 0\quad\text{и}\quad\langle I^\alpha u,u\rangle>0\quad\text{при}\quad u\ne 0.$$

Заметим [1, Лемма 2.1], что при $p\in\left[\frac{2}{1+\alpha},2\right)$ справедлива оценка вида (1), содержащая норму оператора I^α, действующего, согласно теореме Харди-Литтлвуда с предельным показателем, ограниченно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала на отрезке // Соврем. математика. Фундам. направления. 2016. Т. 60. С. 5–22.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2023-0003)

А. В. Буробин (Обнинск)
burobin_av@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Следуя работе [1], для однородной линейной системы уравнений с производными Римана-Лиувилля

$$D_{0+}^{\gamma_i} f_i = a_{i1}(x) f_1 + \cdots + a_{in}(x) f_n \pmod{C_I^{(-\gamma_i)}([0,l])} \tag{1}$$

при $\gamma_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$ поставим задачу Коши, полагая

$$f_i(0) = f_{i0}, i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Здесь $C_I^{(-\gamma_i)}([0,l])$ — обеспечивающие выполнение начальных условий (2) одномерные подпространства пространств $C^{(-\gamma_i)}([0,l])$.

При непрерывных на $[0,l]$ коэффициентах системы такая задача имеет единственное решение с компонентами $f_i \in C^{(0)}([0,l])$, $i = \overline{1,n}$. В частности, при $f_{i0} = 0$, $i = \overline{1,n}$, имеем решение

$$f_i(x) \equiv 0, i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Рассмотрим γ-нормальную систему (1) с постоянными коэффициентами при $\gamma_i = \gamma \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$. Допуская произвол в выборе положительного l, будем исследовать решение (3) на устойчивость по Ляпунову при $x \to \infty$. На данном этапе полагаем $\gamma^{-1} = p + 1$ при натуральном p.

Теорема 1. *Если матрица системы (1) имеет только неположительные собственные значения, причем кратность нулевого собственного значения равна его геометрической кратности, то решение (3) системы устойчиво, но асимптотической устойчивости нет. Решение (3) асимптотически устойчиво при отрицательных собственных значениях матрицы системы.*

Теорема 2. *Если матрица системы (1) имеет положительное собственное значение либо нулевое собственное значение, кратность которого превышает его геометрическую кратность, то решение (3) системы неустойчиво.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Буробин А. В.* Задача Коши для систем уравнений дробного порядка // Материалы XXX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование». Ростов н/Д, 2024. С. 12–13.

С. В. Пикулин (ФИЦ ИУ РАН), spikulin@gmail.com,
С. И. Безродных (ФИЦ ИУ РАН), sbezrodnykh@mail.ru

ОБ АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В докладе представлен новый вычислительный алгоритм [1]–[3] решения начально-краевых задач для нелинейных эволюционных уравнений вида

$$\mathcal{L}[u](x,t) - F\bigl(x,u,\partial_x u\bigr) = f(x,t), \quad x \in [0,L], \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $F(x,u,w)$ и $f(x,t)$ — заданные гладкие функции, $\mathcal{L}[u]$ — линейный дифференциальный оператор, примером которого является оператор теплопроводности $\mathcal{L} \equiv \partial_t - \lambda\,\partial_{xx}^2$ и оператор третьего порядка $\mathcal{L} \equiv \partial_t + \lambda\,\partial_{xxx}^3$. Искомая функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = u_0(x)$, а также подходящему набору краевых условий при $x = 0$, $x = L$ (условия Дирихле либо условия периодичности и т.п.)

Предлагаемый метод использует редукцию исходной задачи к последовательности линейных задач на основе явно-неявной схемы дискретизации по времени (см., например, [4]), а также новый высокоточный полуаналитический метод решения получаемых на каждом временном слое линейных двухточечных краевых задач для уравнения

$$(-1)^{m+1}\,\varepsilon^m\,\frac{d^m}{dx^m}y(x) + y(x) = g(x), \quad x \in [0,L], \quad \varepsilon > 0, \quad m \geq 2,$$

с алгоритмической сложностью $O(K)$, где K — число узлов разбиения отрезка $[0,L]$. Разработанный алгоритм сохраняет эффективность в случае, когда уравнение (1) является сингулярно возмущенным, т.е. при малых значениях параметра λ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Пикулин С. В., Безродных С. И.* Об одном методе решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера // СМФН. 2025. (В печати.)

2. *Пикулин С. В., Безродных С. И.* Численно-аналитический метод для нелинейных уравнений типа Колмогорова – Петровского – Пискунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64. № 11. С. 2019–2045.

3. *Пикулин С. В., Безродных С. И.* Численно–аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием // СМФН. 2023. Т. 69. № 2. С. 208–223.

4. *Лыкосов В. Н., Глазунов А. В., Кулямин Д. В. и др.* Суперкомпьютерное моделирование в физике климатической системы. М.: МГУ, 2012.

А. Л. Скубачевский, Р. А. Байраш (Москва)
alskubachevskii@yandex.ru

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ [1]

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2m$ на интервале $(0,1)$ со спектральным параметром и «чисто интегральными условиями», т.е. условиями, содержащими лишь интегралы Лебега от неизвестной функции и ее производных с некоторыми весами. Впервые такие задачи рассматривались А. Зоммерфельдом в 1908г. Основная трудность в исследовании этих задач заключается в том, что область определения соответствующего дифференциального оператора не является плотной в $L_2(0,1)$. При некоторых условиях на весовые функции, стоящие в интегральных условиях, получена априорная оценка решений в соболевских нормах, зависящих от спектрального параметра. Следствием этого результата является дискретность спектра дифференциального оператора и его секториальная структура. Показано, что при нарушении упомянутых условий на весовые функции спектр занимает всю комплексную плоскость.

О. В. Солонуха (Москва)
solonukha@yandex.ru

О НЕКОТОРЫХ РАЗЛИЧИЯХ В ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

Актуальность исследования эллиптических дифференциально–разностных уравнений объясняется их важными приложениями многочисленными приложениями. Во–первых, они связаны с вариационными задачами, возникающими в теории многослойных пластин и оболочек, в теории управления системами с последействием и т.д. Во–вторых, в ряде случаев к эллиптическим дифференциально–разностным уравнениям приводят эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями, возникающие в теории плазмы (задачи Бицадзе–Самарского), в теории диффузионных процессов и др.

Например, при рассмотрении задачи о минимуме квадратичного функционала, содержащего функцию и ее производные со сдвигами по пространственным переменным, соответствующее уравнение Эйлера имеет

---

[1] Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы

[1] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

вид

$$R_Q^* A R_Q u = f, \qquad x \in Q, \tag{1}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ —ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, A — линейный сильно эллиптический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами второго порядка, R_Q — линейный разностный оператор с постоянными коэффициентами, содержащими сдвиги по пространственным переменным. В случае однородных условий Дирихле $u|_{\partial Q} = 0$ это уравнение сводится к виду

$$A(R_Q^* R_Q)u = f, \qquad x \in Q. \tag{2}$$

Полагая $w(x) = R_Q^* R_Q u(x)$ мы сводим уравнение (2) к виду

$$Aw = f, \qquad x \in Q. \tag{3}$$

Однако, новая функция $w(x)$ должна удовлетворять нелокальным краевым условиям, когда следы функции w на некоторых кусках границы равны линейным комбинациям следов w на сдвигах этих кусков внутри области.

В случае, если уравнение (1) выводится из задачи о минимуме функционала, содержащего функцию и ее производные со сдвигами по пространственным переменным в степени $p > 1, p \neq 2$, дифференциальный оператор A является нелинейным и не будет коммутировать с разностным оператором. Поэтому уравнение (1) не будет эквивалентно уравнению (2), т.е. не сводится к нелокальной эллиптической краевой задаче. Таким образом, в нелинейном случае мы получаем два разных вида дифференциально–разностных уравнений (1) и (2), которые исследуются различными методами и имеют различные приложения.

Секция II
Теория функций

О. Г. Авсянкин (Ростов–на–Дону)
ogavsyankin@sfedu.ru

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ И БИОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ [1]

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

предполагая, что функция $k(x,y)$ удовлетворяет трем условиям:

1° $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y)$, $\forall\, \alpha > 0$;
2° $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y)$, $\forall\, \omega \in SO(n)$;
3° $|k(e_1,y)||y|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, где $e_1 = (1,0,\ldots,0)$.

Определим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ проектор P_{τ_1,τ_2} формулой

$$(P_{\tau_1,\tau_2}\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau_1 < |x| < \tau_2, \\ 0, & |x| < \tau_1 \text{ или } |x| > \tau_2, \end{cases}$$

где $\tau_1 \in (0,1)$, $\tau_2 \in (1,\infty)$. Исследуется применимость к оператору $I + K$ проекционного метода (см. [1, с. 90]) по системе проекторов $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to +\infty$. Также исследуется применимость проекционного метода к парному оператору

$$A = I + K_1 P + K_2 Q,$$

где K_1 и K_2 — операторы вида (1), P и Q — операторы умножения на характеристические функции внутренности и внешности единичного шара соответственно.

При $p = 2$ рассматриваются вопросы применимости проекционного метода по системе проекторов $\{P_{\tau_1,\tau_2} \otimes P_{\tau_1,\tau_2}\}$ к интегральным операторам с биоднородными ядрами, т. е. к операторам вида

$$B = I_1 \otimes I_2 + K_1 \otimes K_2.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, Соглашение Минобрнауки России №075-02-2025-1720.

А. В. Гиль (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

Научный обзор результатов, посвященных интегральным операторам свёртки и Винера–Хопфа в пространствах типа BMO

В докладе рассматриваются операторы свёртки и Винера-Хопфа в пространстве BMO^k, $k \in Z_+$- функций с ограниченной средней осцилляцией k-того порядка, специфические внутренние свойства которых требуют иного подхода, отличного от случая L_p – пространств, даже в вопросах ограниченности, и приводятся результаты об ограниченности, фредгольмовости и обратимости. Интересно отметить, что при переходе к пространству BMO^k, $k \in \mathbf{N}$, условия ограниченности зависят от порядка k, а условия фредгольмовости для сверток -те же, что и при $k = 0$. При изучении фредгольмовости возникает необходимость в использовании весовых свёрточных колец, с весом имеющим разное поведение на $\pm\infty$. При рассмотрении интегральных операторов оказалось, что важную роль играют оценки средних значений функций по интервалам в зависимости от самого интервала и его длины. При этом принципиальным моментом, отличными от случая хорошо известных пространств $L_p(\mathbf{R}^1_+)$, $1 \le p \le \infty$, является то, что для операторов свёртки хорошо оценивается полунорма (так называемая $\|\cdot\|_*$), но одного этого недостаточно и появление дополнительных условий, кроме традиционных условий суммируемости ядра, связано с оценкой «всей» нормы, что эквивалентно описанию условий локальной интегрируемости $(Hf)(x)$.

Была показана ограниченность и обратимость оператора свёртки H в пространстве BMO. Также были рассмотрены операторы Винера–Хопфа и с суммарным ядром в пространстве BMO и в пространстве BMO^k. Оказывается, что в отличии от пространств $L_p(\mathbf{R}^1_+)$, $1 \le p \le \infty$, даже ограниченность таких операторов в $BMO(\mathbf{R}^1_+)$ с аналитическими (в верхней или нижней полуплоскости) символами описывается разными условиями. При исследовании операторов свёртки и Винера-Хопфа в пространстве BMO^k выяснилось, что их ограниченность зависит от k, в то время как характер разрешимости такой же как и в случае $k = 0$.

В. Г. Кротов, М. М. Логиновская (Минск)
krotov@bsu.by, mary.loginovskaya@gmail.com

НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА ДЛЯ КЛАССОВ ХАРДИ–ЛОРЕНЦА

Пусть (X, d, μ) — множество с квазиметрикой d и σ-конечной борелевской мерой μ, $\mathbf{X} := X \times I$, где $I = (0, t_0)$, $0 < t_0 \le +\infty$, на $\mathbf{X}$ зададим меру-произведение $\mu \times m$ (m — мера Лебега на I), $B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\}$, $x \in X$, $t > 0$. Пусть

Для функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ определим максимальную функцию

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y, t)| : d(x, y) < t\}, \quad x \in X.$$

Обозначим $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ — множество всех измеримых функций $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ (эквивалентные функции не отождествляются), для которых $\mathcal{N}u$ конечна μ-почти всюду, $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$ — класс, состоящий из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых $\mathcal{N}u \in L^{p,r}(X)$ ($L^{p,r}(X)$ — обычные классы Лоренца). Введем обозначение $u_t(x) := u(x, t)$, $x \in X$, $t \in I$.

Теорема. *Пусть $0 < p < q \le \infty$, $0 < r \le l < \infty$, $0 < s \le \infty$, при некоторых $n > 0$ и $K > 0$ выполнены неравенства $t^n \le K\mu(B(x, t))$ при $x \in X$, $t \in I$. Тогда справедливы неравенства*

$$|u(x, t)| \le Ct^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad x \in X,\ t \in I, \quad u \in \mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X});$$

$$\|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \le Ct^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad t \in I, \quad u \in \mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X});$$

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \le C \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}, \quad u \in \mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$$

(постоянные C не зависят от x, t и u).

Такие неравенства впервые доказывали Г. Харди и Дж. Литтлвуд [1] для аналитических функций из классов Харди в единичном круге из $\mathbb{C}$, Т.Флетт [2] — для гармонических функций на $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Для классов $\mathcal{H}^p(\mathbf{X}) = \mathcal{H}^{p,p}(\mathbf{X})$ см. [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Zeit. 1932. V. 34, № 1. P. 403–439.

2. *Flett T. M.* On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions // Proc. London Math. Soc. 1970. V. 20, № 4. P. 749–768.

3. *Кротов В. Г.* Интерполяционная теорема Марцинкевича для пространств типа Харди и ее приложения // Матем. Сборник. 2024. Т. 215, № 8. С. 95–119.

Т. С. Мардвилко (Минск, Республика Беларусь)
mardvilko@mail.ru

АСИМПТОТИКА НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ [1]

Для $l \in \mathbb{N}$ и $x \in [-1, 1]$ рассмотрим функции

$$\varphi_l(x) = x^l \ln|x| \quad \text{при} \quad x \neq 0, \quad \varphi_l(0) = 0.$$

В [1] найдена слабая асимптотика наилучших равномерных рациональных приближений функций $\varphi_l(x)$, а именно показано

$$R_n\left(\varphi_l; [-1, 1]\right) \asymp \exp\left(-\pi\sqrt{ln}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Неравенства (1) следуют из асимптотик наилучших рациональных приближений нечетного и четного преобразований Коши, полученных в [1].

Отметим, что асимптотика наилучших равномерных рациональных приближений функций с логарифмическими особенностями найдена в [2] методами действительного пространства Харди-Соболева на прямой. Примеры оценок наилучших рациональных приближений функций со степенными и логарифмическими особенностями можно найти также в работах [3], [4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мардвилко Т. С.* Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши // Матем. сб. 2025. Т. 216, № 2. С. 110-127.

2. *Мардвилко Т. С., Пекарский А.А.* Применение действительного пространства Харди — Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика 2022. № 3. С. 16–36.

3. *Мардвилко Т. С.* Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжений функций // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 2. С. 215–222.

4. *Мардвилко Т. С.* Применения действительного пространства Харди-Соболева на прямой для нахождения наилучших рациональных приближений в Lp" / Т.С. Мардвилко // Труды Института математики НАН Беларуси, 32 (2), 2024, С. 31 – 42.

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (проект 20211888)

V. R. Misiuk (Grodno, Republic Belarus)
misiuk@grsu.by

CONCERNING ONE EMBEDDING THEOREM OF THE SOBOLEV

Let D be the circle $|z| < 1$ in the complex plane. For $0 < p \leqslant \infty$ we denote by $L_p(D)$ the Lebesgue space of complex functions on D with respect to the flat Lebesgue measure with the usual quasi-norm $\|f\|_{L_p(D)}$. Spaces Sobolev $W_p^s(D)$ are well known and quite deeply studied. The following Sobolev embedding theorem is well-known [1]:

$$W_q^1(D) \subset L_p(D),$$

where $2 \leq p < \infty$ and

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}.$$

In this report, we plan to highlight the question that the following analog of the inversion of this theorem is true for rational functions of a given degree.

It should be noted that various aspects of these relations and their applications were previously studied by the author in [2], [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stein E.* Singular Integrals and Differentiability Propeties of Functions // Princeton Univ. Press, NJ, 1970.

2. *Misiuk V. R.* Refinement of inequalities and theorems of Bernstein type theory of rational approximations with respect to the plane Lebesgue measure // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. 2008. 68 (2). P. 22–31.

3. *Misiuk V. R.* On the inverse theorem of the theory of rational approximations for Bergman spaces // Problems of physics, mathematics and technics. 2010. No. 1(2). P. 34–37.

П. Г. Поцейко Е. А. Ровба (Гродно, Республика Беларусь)
pahamatby@gmail.com rovba.ea@gmail.com

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ СОПРЯЖЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА ОТРЕЗКЕ [1]

Задачи аппроксимаций тригонометрических интегралов Пуассона берут свое начало с работ С. М. Никольского [1], С. Б. Стечкина [2] и других известных математиков. Вместе с тем наряду с тригонометрическими интегралами Пуассона имеет смысл рассматривать классы функций, представимых алгебраическими интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$, и им сопряженных и исследовать аппроксимации на этих классах.

В 1979 году был введен [4] рациональный интегральный оператор на отрезке $[-1, 1]$, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Этот оператор нашел широкое применение при решении задач рациональных аппроксимаций в том числе аппроксимаций интегралов Пуассона [5]. В работе [6] был введен сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва.

В докладе планируется осветить результаты исследований аппроксимаций посредством сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва сопряженных интегралов Пуассона на отрезке $[-1, 1]$, а также индивидуальных функций, задаваемых сопряженными интегралами Пуассона в случае, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.

2. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Труды МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.

3. *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

4. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва // Сиб. матем. жур. 2021. Т. 62, № 2. С. 362–386.

5. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Сопряженный рациональный оператор Фурье–Чебышева и его аппроксимационные свойства // Изв. вузов. Матем. 2022. № 3. С. 44–60.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2025», № 20212046 (Республика Беларусь).

С. М. Ташпулатов (Ташкент, Республика Узбекистан)
sadullatashpulatov@yandex.com

О СПЕКТРАХ ТРЕХМАГНОННЫХ СИСТЕМ

Рассматривается оператор энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга и исследуем структуру существенного спектра и дискретный спектр системы в $\nu-$ мерной решетке Z^ν. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_{m,\tau} (\overrightarrow{S}_m \overrightarrow{S}_{m+\tau}), \qquad (1)$$

где $J < 0-$ параметр билинейного обменного взаимодействие между ближайшими атомами, $\overrightarrow{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ оператор атомного спина $s = \frac{1}{2}$ в узле решетке m, и суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям. Гамильтониан H действует в антисимметрическом комплексном пространстве Фока $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_\mathcal{H})$. Обозначим через φ_0 вектор называемый вакуумным и однозначно определяемым условиями: $S_m^+\varphi_0 = 0$ и $S_m^z\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi_0$, где $||\varphi_0|| = 1$. Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$, где S_m^- и S_m^+ является, соответственно операторами рождения и уничтожения магнона в узле m. Векторы $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ описывает состояние трехмагнонных систем, находящихся в узлах p, q и r со значениями спина $s = \frac{1}{2}$. Векторы вида $\psi = \sum_{p,q,r} f(p,q,r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ образует ортонормальные системы. Обозначим через $\mathcal{H}_3$ замыкание пространство, натянутое на этих векторов. Оно называется трехмагнонных пространством H.

Теорема 1. *Подпространство $\mathcal{H}_3$ инвариантно относительно оператора H. Оператор H_3 является ограниченный самосопряженный оператор. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_3$, действующий в пространстве $l_2((Z^\nu)^3)$. Сам оператор H_3 на вектор $\psi \in \mathcal{H}_3$ действует по формуле*

$$H_3\psi = \sum_{p,q,r} (\overline{H}_3 f)(p,q,r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0. \qquad (3)$$

С помощью спектра оператора энергии двухмагнонных систем в модели Гейзенберга, описывается структура существенного спектра и дискретный спектр трехмагнонных систем в модели Гейзенберга.

Г. А. Тихонова (Ростов-на-Дону)
kamenskih@sfedu.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ СТЕПЕНИ α ЯДРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Пусть $\mathbb{B}_n$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$. В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{B}_n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \tag{1}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, измерима и однородна степени α ($\alpha \in \mathbb{R}$), т. е.

$$k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} k(x,y), \quad \forall \lambda > 0.$$

Получены необходимые условия на показатель α, обеспечивающие ограниченность оператора K вида (1). А именно

Теорема 1. *Если функция $k(x,y)$ однородна степени α и оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, то $\alpha \geqslant -n$.*

Достаточные условия ограниченности дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $k(x,y)$ однородна степени α, где $\alpha \geqslant -n$, и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\varkappa_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma,t)|\,|t|^{-n/p}\,dt < \infty,$$

$$\varkappa_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(t,\sigma)|\,|t|^{-n/p'-\alpha-n}\,dt < \infty.$$

Тогда оператор K вида (1) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, причем

$$\|K\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)} \leqslant \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)}.$$

Аналогично рассматривается ограниченность оператора с однородным ядром в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Avsyankin O. G., Kamenskikh G. A.* Integral operators with homogeneous kernels of degree α in Lebesgue spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2024.

Секция III
Дискретная математика, алгебра, геометрия

В. В. Казак (ЮФУ, Россия)
vkazak136@gmail.com

О ЛИБМАНОВСКИХ КРИВЫХ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследование бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с условием обобщенного скольжения или с втулочными связями на краю приводит к задаче с наклонной производной [1], [2]. Аналитически такие связи могут быть записаны в виде $(\bar{u}, \bar{e}) = \sigma$, где $\bar{u}$ – поле смещений; $\bar{e}, \sigma$ известные функции. Если $\bar{e} = \bar{k} = \text{const}$, $\sigma \equiv 0$, то мы получим условие скольжения, которое впервые для сферических сегментов исследовал H.Liebmann. Если поверхность S с краем Γ допускает нетривиальные изгибания, при которых на Γ выполняется условие $(\bar{u}, \bar{k}) = 0$, то Γ будем называть «либмановской» кривой.

Пусть S – овалоид, $S \in C^{3,\nu}$, $0 < \nu < 1$, $K \geq k_0 > 0$ линия тени которого Γ делит его на две части S^+ и S^-. Пусть S^+ та часть овалоида, которая однозначно проектируется на плоскость Oxy. Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых Γ_ε, $\Gamma_\varepsilon \subset S^-$, $0 \leq \varepsilon < \infty$ аналитически зависящих от ε, ограничивающих куски овалоида, включающие в себя S^+.

Теорема. *Если* Γ_ε, $\Gamma_\varepsilon \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$ *нигде не касаются пучка плоскостей с осью* Oz, *то среди семейства* Γ_ε *существует не более чем счетное множество либмановских кривых сходящихся к линии тени.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Фоменко В. Т.* Некоторые результаты теории бесконечно малых изгибаний // Матем. сб. 1967. Т. 72, № 3. С. 328–411.

2. *Казак В. В.* Исследование условия обобщенного скольжения для одного класса поверхностей положительной кривизны // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 1. С. 115–121.

Секция IV
Теория вероятностей и стохастические методы

Т. Р. Абдрахманов, А. Е. Кондратенко, К. Д. Октысюк,
В. Н. Соболев (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
timur.abdrakhmanov@math.msu.ru, ae_cond@mech.math.msu.su,
kseniia.oktysuk@math.msu.ru, sobolev_vn@mail.ru

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЭНФОРДА НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ОСНОВАНИЕ ЛОГАРИФМА

Дискретная случайная величина называется распределенной по закону Бенфорда (закон первой значащей цифры), если она принимает значения $1, 2, \ldots, 9$ с вероятностями $p_k = \lg \frac{k+1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, 9$.

Пусть η распределена равномерно на отрезке [0, 1]. Тогда будем говорить, что случайная величина $\xi_n = [n^\eta]$, принимающая значения $1, 2, \ldots, n-1$ с вероятностями $p_k = \log_n \frac{k+1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, имеет обобщенное распределение Бэнфорда по основанию n.

В работе [1] показано, что для случайной величины η, имеющей гамма-распределение с параметром α, дробная часть логарифма η по произвольному основанию больше 1 имеет распределение, стремящееся к равномерному на отрезке [0, 1] при $\alpha \to 0$. Кроме того, получены оценки отклонения первой значащей цифры η от распределения Бэнфорда.

В работе [2] исследуется связь распределения первой значащей цифры ζ, случайной величины с односторонне устойчивым распределением с параметром α, и распредедления Бэнфорда.

В данной работе результаты [1] и [2] обобщаются для введенного выше распределения Бэнфорда по основанию n.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Куликова А.А., Прохоров Ю.В., Хохлов В.И.* H. F. D. (H-function distribution) и закон Бэнфорда. I // Теория вероятностей и ее применения. - 2005. - Т. 50, № 2. - С. 366–371

2. *Куликова А.А., Прохоров Ю.В.* Односторонние устойчивые распределения и закон Бэнфорда // Теория вероятностей и ее применения. - 2004. - Т. 49, № 1. - С. 178–184

А. А. Замятин (Москва), М. В. Меликян (Москва), М. В. Новак (Москва)
andrew.zamyatin@gmail.com, melikianmv@my.msu.ru, novack-mischa2012@yandex.ru

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ СЧЁТНОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ В ПОЛОСЕ С НАКОПЛЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

Рассмотрим систему частиц в полосе $\Pi = \mathbb{Z}\text{x}\{0, 1, 2, ..., N-1\}$. В начальный момент времени в каждой точке подмножества $\Pi_+ = \mathbb{N}\text{x}\{0, 1, 2, ..., N-1\}$, расположена ровно одна частица. Динамика каждой частицы определяется однородной и дискретной по времени, неприводимой и непериодичной марковской цепью $\xi_t = (\xi_t^1, \xi_t^2)$ с пространством состояний Π и с переходными вероятностями

$$p_{l_1 j_1}^{lj} = P(\xi_{t+1} = (l_1, j_1)|\xi_t = (l, j)),\ (l, j), (l_1, j_1) \in \Pi,$$

удовлетворяющими условиям:
$p_{l_1 j_1}^{lj} = 0$ при $|l - l_1| > 1$ и $p_{l_1 j_1}^{lj} = p_{l_1 - l, j_1}^{0j}$. Предполагается, что случайные блуждания различных частиц независимы и одинаково распределены. Когда любая частица впервые попадает во множество $\Pi_0 = \{0\}\text{x}\{0, 1, 2, ..., N-1\} \subset \Pi$, она поглощается в нем. Обозначим через $n(t)$ число частиц поглощенных (накопленных) во множестве Π_0 к моменту времени t. Определим эргодическую марковскую цепь с множеством состояний $\{0, 1, 2, ..., N-1\}$ и с переходными вероятностями

$$q_{j_1}^{j} = p_{l+1 j_1}^{lj} + p_{l j_1}^{lj} + p_{l-1 j_1}^{lj}.$$

Обозначим через π_j стационарное распределение этой цепи.
Положим $v = \sum_{j=0}^{N-1} \pi_j m_j$, где $m_j = E(\xi_{t+1}^1 - \xi_t^1 | \xi_t^1 = 0, \xi_t^2 = j)$, $j \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$.

Теорема 1.

1) При $v < 0$ существует $\frac{n(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{P} -Nv$, $t \to \infty$.

2) При $v > 0$ существует константа C такая, что $En(t) \le C$.

3) При $v = 0$ существует предел $\frac{En(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} c$, где константа $c > 0$ может быть найдена в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Malyshev V. A.* Stochastic Growth Models without Classical Branching Processes //Markov Processes and Related Fields. 2022. V. 28. P. 179–184.

2. *Замятин А. А., Малышев В. А.* Накопление на границе для одномерной стохастической системы частиц //Проблемы передачи информации. 2007. Т. 43, выпуск 4. С. 68–82.

А. Е. Кондратенко, К. Д. Октысюк, В. Н. Соболев, А. А. Фролов
(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова)
ae_cond@@mech.math.msu.su, kseniia.oktysuk@math.msu.ru, sobolev_vn@mail.ru, faa75@yandex.ru

О МАКСИМИЗАЦИИ ЭНТРОПИИ ОДНОГО КЛАССА МАРКОВСКИХ ИСТОЧНИКОВ

Свойство асимптотической равнораспределённости у дискретных источников сообщений является информационным аналогом закона больших чисел. В работе на пространстве двоичных векторов рассматривается один класс марковских источников, описываемый через матрицы перехода цепи Маркова за один шаг $\mathbb{P}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Среди источников данного класса ищется источник с максимальной энтропией $\mathrm{H}_\infty = \max\limits_{\alpha} \mathrm{H}_\infty(\alpha)$, который также обладает множеством максимальной мощности ε-типичных векторов [1, 2]. Поэтому можно считать, что данная марковская цепь предпочтительнее остальных из данного класса при её использовании в практических приложениях, поскольку имеет максимальное число асимптотически равновероятных “слов” длины n.

Таким образом, рост энтропии в данной задаче напрямую связан с понятием равновероятности, что развивает результаты работы [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Чечета С.И.* Введение в дискретную теорию информации и кодирования // МЦМНО, М., 2011, 224 с.

2. *Заец М.В., Кондратенко А.Е.* Задачи по теории информации и кодирования: примеры и решения // ООО «МАКС Пресс», М., 2022, 92 с.

3. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. — 2022. — Т. 37, № 1. — С. 7–11

В. Н. Соболев, А. Е. Кондратенко, Н. А. Елизарова (Москва)
sobolev_vn@mail.ru, ae_cond@mech.math.msu.su,
elizarova77@mail.ru

О СВЯЗИ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ СХОДИМОСТЕЙ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Понятия сходимости, придя в теорию вероятностей из теории функций, с успехом используются в различных задачах теории вероятностей [1, стр. 3]. Поэтому важность исследования взаимосвязей между различными видами сходимости неоспорима.

В докладе рассматриваются три основных вида сходимости (по вероятности, по распределению, слабая сходимость) [2], когда предельным распределением является вырожденное в нуле распределение.

Напомним, что сходимость по распределению $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ последовательности случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно определить как слабую сходимость последовательности их функций распределения $\{F_n\}$ к предельной функции F распределения величины ξ. [1, стр. 5]

В терминах математических ожиданий слабая сходимость функций распределения $F_n \xrightarrow{w} F$ может быть записана как существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}f(\xi_n) = \mathsf{M}f(\xi)$ для класса ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций f.

Для последних двух видов сходимости, как хорошо известно, справедлив критерий $\left(F_n \xrightarrow{w} F\right) \Longleftrightarrow (F_n \Rightarrow F)$. В частном случае, когда $\xi = 0$ также верно $\left(\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0\right) \Longleftrightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{\mathsf{D}} 0\right)$.

В докладе показывается, что в этом случае слабая сходимость (и как следствие критериев все остальные рассматриваемые типы сходимостей) эквивалентна выполнению равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}f(\xi_n) = f(0)$ лишь для одной функции f из некоторого подкласса ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций.

Данная работа может быть рассмотрена в свете более ранних работ авторов [3,4]. Авторы выражают искреннюю признательность В.В. Козлову за внимание к их работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *В.В.Сенатов* О слабой сходимости распределений. — М. : [б.и.], 2009. — 27 с.

2. *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

3. *Н. А. Елизарова, В. Н. Соболев, А. Е. Кондратенко* К вопросам сходимости в законе больших чисел // XXX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XIV Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения" 27 мая - 3 июня 2024 г. Материалы. Ростов н/Д: Изд-во Фонд науки и образования, 2024. С. 33.

4. *В. Н. Соболев, А. Е. Кондратенко, Н. А. Елизарова* Об одном вероятностном свойстве Фейеровских пар или об одном классе характеристических функций // XXX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XIV Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения" 27 мая - 3 июня 2024 г. Материалы. Ростов н/Д: Изд-во Фонд науки и образования, 2024. С. 34.

Секция V
Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии

В. Д. Бейбалаев, А. А. Аливердиев, Т. И. Ибавов (Махачкала)
kaspij_03@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО И ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

В работе исследовано решение начально-краевой задачи для полуограниченного тела, которое имеет тепловую изоляцию боковой поверхности, включающей эффекты памяти через дробную производную Капуто по времени. При этом теплообмен между другим концом области и окружающей средой происходит по закону Ньютона, и температура среды задается некоторой функцией от времени. Исследовано распределение температуры в области с учетом эффектов памяти [1,2].

Получено решение для задачи теплопроводности для полуограниченного тела с граничными условиями третьего рода, где допустимо представление $f(\tau) = T_n\sqrt{\tau^{\alpha(\tau)}}$, то есть температура среды в зависимости от времени меняется по степенному закону. Это может представлять интерес для сред, свойства которых имеют явную зависимость от времени. Физически это может быть обусловлено реструктуризирующим внешним воздействием (электромагнитным или иной природы) с возможной последующей деградацией наведённых свойств. Данная область является в настоящее время предметом обширного ряда технических приложений (смарт-материалы и т.п.). Тем не менее, применения аппарата дробного дифференцирования к подобного рода задачам является новым подходом.

Решение задачи получено операционным методом, применяя преобразования Лапласа по временной переменной. Проведен анализ решения задачи для различных температур среды.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Hristov J.* Heat Conduction in a Semi-Infinite Domain with a Memory Effect: Analytical Solutions with a Robin Boundary Condition // Fractal Fract. 2023. V. 7, № 10. P. 770.

2. *Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Yakubov A. Z., et al.* Mathematical Model of Heat Conduction for a Semi-Infinite Body, Taking into Account Memory Effects and Spatial Correlations // Fractal Fract. 2023. V. 7, № 3. P. 265.

V. L. Litvinov (Samara), K. V. Litvinova (Moscow)
vladlitvinov@rambler.ru

Study of cubic equalized states when simulating filtration of hydrocarbon solutions

Natural gases and oil are multicomponent solutions. Methods for predicting and analyzing their phase state and thermodynamic properties are based on the integrated use of field measurement results, laboratory studies, and mathematical modeling of the corresponding processes. Modern hydrodynamic simulators use cubic equations of state to determine the state of a liquid and model filtration processes. This article examines which of the presented equations best describes the properties of pure substances. The calculations use expansion of functions into Fourier series. Equations of state are used to calculate the density, volatility, and z-factor of a substance in liquid and gaseous states. Let us consider the following equations of state: Redlich-Kwong (RK), Soave-Redlich-Kwong (SRK), Peng-Robinson (PR). The equations are common to the liquid and gas phases; they are cubic and two-parameter. If the equation has three real roots, the largest root corresponds to the gas phase, and the smallest to the liquid phase. The average root has no physical meaning [1–3].

Calculations were carried out implementing the presented algorithm for three equations of state: PR, RK, SRK, using the example of methane. Volumetric calculations were carried out at temperatures of 150, 200 and 300 K and compared with data from the NIST website.

From a technical point of view, one of the advantages of cubic equations over others is the ability to analytically determine the roots, which allows saving machine time when performing complex research and design calculations [1–6]. Studies using methane confirmed the data that in modern hydrodynamic simulators it is preferable to use the PR and SRK equations of state, since they provide higher accuracy compared to the RK equation.

References

1. Koldoba E. V. Self-similar solutions to the equations of two-component isothermal filtration with phase transitions/Mathematical modeling. T.8 No. 7, 2006, p. 53–60.
2. Koldoba E. V. Method for constructing thermal constants of phase equilibrium of multicomponent solutions/Mathematical modeling. T.30 No. 4, 2018, p. 84–96.
3. Koldoba A. V., Koldoba E. V. Model equation of state and Gibbs potential for numerical calculation of multicomponent filtration problems with phase transitions. — Geochemistry, N5, 2004, p. 573–576.
4. Koldoba E. V. Mathematical modeling of isothermal multicomponent multi-phase filtration with phase transitions: dissertation... Candidate of Physical and Mathematical Sciences: 05.13.18 / Koldoba Elena Valentinovna; [Place of defense: Institute of Mathematical Modeling of the Russian Academy of

Sciences]. — Moscow, 2005. — 113 p.: ill.
5. Litvinov V. L., Litvinova K. V. “Construction of self-similar solutions to two-component filtration equations when modeling oil and gas production”, Geometric methods in control theory and mathematical physics. III International Scientific Conference (Ryazan, April 26–30, 2021). pp.61–62.
6. Litvinov V. L., Litvinova K. V. “On one solution to the equations of multicomponent filtration with phase transitions when modeling the development of oil and gas-containing reservoirs”, Youth science: challenges and prospects: [Electronic resource]: Materials of the IV All-Russian scientific and practical conference / Rep. editor O.V. Karsuntseva – Samara: Samar. state tech. univ., 2021. — 1 electronic opt. disk (CD-R)., 2021, 114–120.

М. И. Муконина, Н. В. Демехина, Д. В. Ольховатов
(Ростов-на-Дону)
kaspij_03@mail.ru

МЕТОДЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Исследование выполнено в рамках гранта, предоставленного банком ВТБ (ПАО) на выполнение молодыми учеными научных работ в 2025 году.

Прогнозирование временных рядов – важнейшая область науки о данных, которая предполагает предсказание будущих значений на основе исторических данных, собранных через последовательные промежутки времени. Она находит широкое применение в различных отраслях, включая финансы, здравоохранение, энергетику и розничную торговлю, где организации стремятся принимать обоснованные решения на основе прогнозируемых тенденций и закономерностей. Учитывая значительное влияние прогнозирования на операционную эффективность и стратегическое планирование, выбор подходящих методов машинного обучения для прогнозирования временных рядов стал одним из основных направлений исследований и практики в данной области.

Процесс выбора метода машинного обучения для прогнозирования временных рядов многогранен и зависит от различных факторов, включая знания о предметной области, характеристики обучающих данных, метрики оценки и сложность реальных наборов данных. Выбор алгоритма может существенно повлиять на точность и надежность прогнозов, причем варианты могут быть самыми разнообразными: от традиционных статистических моделей типа ARIMA до передовых методов машинного обучения.

Поскольку отрасли все больше полагаются на данные, понимание тонкостей прогнозирования временных рядов и последствий выбора метода остается жизненно важным для оптимизации производительности и процессов принятия решений. Таким образом, выбор метода машинного обучения для прогнозирования временных рядов – это не только техническая задача, но и стратегическое решение, требующее глубокого понимания как имеющихся данных, так и более широкого контекста их применения. Поскольку эта область продолжает развиваться, важно устранить существующие ограничения и одновременно использовать потенциал инновационных методов прогнозирования для улучшения предиктивной аналитики. Несмотря на широкое распространение, прогнозирование временных рядов сопряжено с различными трудностями. Временная зависимость, присущая данным временных рядов, и зачастую короткая продолжительность имеющихся наборов данных затрудняют точное прогнозирование. Кроме того, выбор алгоритма прогнозирования может существенно повлиять на результаты, поскольку различные модели могут более эффективно отражать различные закономерности в зависимости от конкретного набора данных и контекста [1].

Рассмотрим классические методы машинного обучения, позволяющие решить задачу регрессии временных рядов. Методы, основанные на дереве решений, такие как случайный лес и градиентный бустинг, являются мощными инструментами прогнозирования временных рядов [2]. Эти модели строят множество деревьев решений, которые повышают точность прогнозирования за счет учета сложных нелинейных взаимосвязей в данных. Например, случайные леса усредняют прогнозы из различных деревьев, чтобы уменьшить дисперсию, в то время как градиентный бустинг строит деревья последовательно, чтобы исправить ошибки из предыдущих моделей.

Модели ARIMA (Авторегрессионное интегрированное скользящее среднее) используют авторегрессию и скользящие средние, в то время как методы экспоненциального сглаживания применяют экспоненциально уменьшающиеся веса к прошлым наблюдениям.

SVM – еще один вариант прогнозирования временных рядов, известный своей способностью эффективно решать задачи нелинейной регрессии. Преобразуя входные признаки в более высокую размерность, SVM могут моделировать сложные взаимосвязи в данных.

Понимание бизнес-процессов, отраслевых стандартов и соответствующих нормативных актов может существенно повлиять на разработку модели и ее соответствие реальным приложениям. Знание предметной области позволяет специалистам эффективно интерпретировать результаты и принимать обоснованные решения на основе прогнозов модели.

Список литературы

1. Исследование технологий машинного обучения во встроенных системах / О. В. Игнатьева, Д. Н. Чупий, Д. С. Журавлев, А. Д. Сокирка // Транспорт: наука, образование, производство: Сборник научных трудов Международной научно-практической конференции, Ростов-на-Дону, 24–26 апреля 2024 года. — Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2024. — С. 135–139. – EDN UUAJKY.

2. Machine Learning Meets Cancer / E. V. Varlamova, M. A. Butakova, V. V. Semyonova [et al.] // Cancers. – 2024. – Vol. 16, No. 6. – P. 1100. – DOI 10.3390/cancers16061100. – EDN FRFAEP.

А. Ю. Переварюха, А. В. Погодина (Санкт–Петербург)
madelf@rambler.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СМЕНЫ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ В ПОПУЛЯЦИОННЫХ ВОЛНАХ [1]

В предлагаемых моделях рассматривается образование непрерывных эволюционирующих популяционных волн. Эффекты кризисной динамики рассмотрены при состоянии $N(t) \to 0 + \epsilon$ и сопровождаются длительными осцилляциями изменяющими форму, когда биосистема получит ряд сценариев динамики кризиса, включая гибель $N(t_\infty) = 0$.

Зададим пороговое развитие инвазионного популяционного процесса в уравнении с функцией сопротивления среды $\dot{N} = F(N(t-\tau)) - \Psi(N(t-\nu))$. Пороговый эффект реакции агрессивному росту численности вселенца выразим $\ln_K$-регуляцией в функции противодействия $\Psi(N(t-\nu))$ и при $\mathcal{Q} > q, m \geq 2, N(0) < J < \mathcal{K}$. Запаздывание ν в модели инвазии нами возмущенно равномерно распределенной случайной величиной $\nu \times \gamma$ на плавающем отрезке: $[0, 0.5\nu]$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau)}\right) - \mathcal{Q}\frac{N^m(t-\nu\times\gamma)}{(J-N(t))^2} - qN(t). \qquad (1)$$

Вместо стабилизации $N(t) \to K, N(t_S) < K$ и превышения равновесия K стадия кризиса с возрастанием $F(N^2; J^{-1})$ при $N \to J$ и потенциал роста не нивелирован $\ln_K$-регуляцией. Время активации вариативно, но не менее τ_1. Пусть τ_1 варьируется случайной величиной γ в ограниченном диапазоне. Предложим модель с возмущенным равномерной случайной величиной γ запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau\gamma)}\right) - \frac{\delta N^2(t-\tau_1\gamma)}{(J-N(t))^2} - qN(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1,2]. \quad (2)$$

При приближении $N(t)$ к пороговому значению $J, N(0) < J < \mathcal{K}$ резкий переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \to 0 + \epsilon$. Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний $N(t) \to N_*(t), \max N_*(t) < J$ зависит от стохастических факторов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Переварюха А. Ю.* Моделирование эффекта волнообразной кривой воспроизводства популяций рыб // Экологические системы и приборы. 2008. № 8. С. 41–44.

[1] Работа выполнена в рамках бюджетной темы СПБ ФИЦ РАН.

М. М. Цвиль, А. Н. Шарлай (Ростов-на-Дону)
nastya.sharlay.02@mail.ru

Оценка товарооборота Российской Федерации с Китайской Народной Республикой

В статье приведена гравитационная модель, построенная на основе статистических данных за период 2000–2024 гг., описывающая динамику объемов импортных потоков Российской Федерации из Китайской Народной Республики. По построенной модели сделан прогноз на 2025–2027 гг. в базовом и пессимистичном сценарии с учетом факторов, оказывающих наиболее сильное влияние на импортный поток РФ из Китая.

Секция VII Информационно-коммуникационные технологии в науке, образовании и производстве

А. М. Райцин (Москва, МТУСИ),
М. В. Улановский (Москва, ФГБУ ВНИИОФИ)
arcadiyram@rambler.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Разработчиков лазеров и систем на их основе интересует пространственное распределение интенсивности (РИ) лазерного пучка в поперечном сечении и его сравнение с пространственным РИ Гаусса. В настоящее время сходство определяется единственной стандартизованной характеристикой M^2, принимающей значение единица при полном совпадении измеренного РИ с РИ Гаусса и превышающей единицу при отличии [1]. Авторами разработаны и представлены альтернативные методы идентификации пространственных РИ, имеющие преимущество с известным, заключающиеся в простоте применения в реальном масштабе времени: метод — на базе функциональных неравенств, классические методы решения вариационных задач, определяющие степень сходства распределения интенсивности излучаемого пучка с гауссовым или равномерным,кумулянтный метод [2,3].

Практически для решения задачи идентификации применяется информационно-измерительная система, основу которой составляет многоэлементный измерительный преобразователь (матрица) с блоком обработки отсчетов измеренного РИ. В настоящей работе представлены результаты экспериментальных исследований всех рассмотренных методов для реальных РИ. Проведено сравнение различных мер идентификации и на основе полученных оценок выработаны рекомендации для их применения.

ЛИТЕРАТУРА

1.*ГОСТ Р ИСО 11146–2008. Лазеры и лазерные установки (системы). Методы измерений ширин, углов расходимости и коэффициентов распространения лазерных пучков. Ч.1. М. : Стандартинформ, 2010. 20 с.*

2.*Raitsin A. M.,Ulanovskii M. V.* Bases for the Identification of Spatial Distributions of Intensity Laser Beams//Measurement Techniques, 2022. V.65, pp.258–265. https://link.springer.com/article/10.1007/s11018-022-02077-6

3.*Raitsin, A. M.* Cumulant method for identifying spatial distributions of laser beam intensity// Measurement Techniques,2024.V.67, pp.597–607. https://doi.org/10.1007/s11018-024-02380-4

Секция VIII
Цифровая экономика: тенденции развития

А. В. Меликян (Санкт-Петербург), И. П. Соколова (Санкт-Петербург)
phd.melikyan@gmail.com

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ПРОЦЕССА ДЛЯ РОБОТИЗАЦИИ

В данной статье представлено всестороннее исследование стратегического применения роботизированной автоматизации процессов (RPA) в современной бизнес-среде. В связи с быстрой интеграцией информационных технологий и их преобразующим воздействием на различные отрасли, потребность в эффективной автоматизации процессов стала более очевидной чем когда-либо. В исследовании рассматривается конвергенция интеллектуального анализа процессов (PM) и роботизированной автоматизации процессов, подчеркивается их совместный потенциал в повышении операционной эффективности и оптимизации производительности. На основе углубленного обзора литературы в исследовании рассматриваются существующие критерии и методологии отбора и расстановки приоритетов процессов, подходящих для реализации RPA. В статье предлагается комплексный план исследования, который включает в себя вторичное исследование, разработку теоретической базы, выведение критериев, построение математической модели, валидацию с помощью анализа набора данных и консультации экспертов. Предлагаемая модель призвана предложить систематический и структурированный подход к объективной оценке пригодности RPA, позволяющий организациям оптимизировать свои инициативы по автоматизации, эффективно распределять ресурсы и получать ощутимые преимущества, такие как экономия затрат и операционное превосходство. Однако в исследовании также рассматриваются и признаются ограничения, связанные с настройкой, технологическими достижениями, управлением изменениями и информационной безопасностью, которые необходимо учитывать для обеспечения успешного внедрения RPA и устойчивого конкурентного преимущества. В целом, статья и разработанная модель успешно восполняют существующий пробел в знаниях и предоставляют компаниям необходимый инструмент для принятия решений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Wanneri J., Hofmann A. et all* Process selection in RPA projects - Towards a quantifiable method of decision making. //In 40th International Conference on Information Systems, ICIS. 2019.

2. *Chui M., Manyika J., Miremadi M.* Where machines could replace humans-and where they can't (yet).//McKinsey Quarterly. 2016. P. 58-69.

3. *Van der Aalst W., Adriansyah A., ... & Wynn M.* Identifying candidate tasks for robotic process automation in textual process descriptions //Process mining manifesto. In Business Process Management Workshops: BPM 2011

International Workshops, Clermont-Ferrand, France, August 29, 2011, Revised Selected Papers, Part I 9. 2012. P. 169-194.

Секция X
Современные проблемы образования

Е. О. Ермолаева (Москва)
eoermolaeva@yandex.ru

А. А. Чупров — ученый и педагог (к 150–летию со дня рождения)

Творческое наследие выдающегося ученого А. А. Чупрова остается актуальным даже через столетие. Летопись МГУ [1] описывает творческие пути Александра Ивановича Чупрова (1842–1908), заслуженного профессора Московского университета (1901) и Александра Александровича Чупрова (1874–1926), члена-корреспондента Российской АН (1917) как династию учёных-экономистов и статистиков. Отец и сын Чупровы родились в уездном городе Мосальске Калужской губернии. А. А. Чупров закончил физико-математический факультет Московского университета в 1896 г. и продолжил своё обучение в Берлине и Страсбурге у знаменитых европейских ученых, готовясь к преподаванию в России. Его научной целью было не только развитие математических методов, но и широкое внедрение их в прикладных сферах деятельности. Теория вероятности и статистика для него были средством изучения природы и общественных явлений [2].

В 1902–1917 гг. А. А. Чупров руководил кафедрой статистики в Петербургском политехническом институте, где, соединяя экономически важные задачи и развиваемые им методы математической статистики, реализовывал передовые идеи при подготовке отечественных научно-инженерных кадров. Созданный им статистический кабинет обеспечивал практическую направленность обучения [3]. В 1909 г. из печати вышли «Очерки по теории статистики», в Московском университете состоялась защита диссертации, А.А. Чупров стал доктором экономических и политических наук. В 1917 г. он, уехав на летние каникулы в Швецию, в Россию не вернулся. Он белоэмигрантом не считался и не терял связи с родиной [4]. Его ученики и последователи составили передовую группу экономистов, возглавивших первые создаваемые органы управления советской экономикой. А.А. Чупров заложил прочные традиции эффективного преподавания, соединяющего освоение теории и практику её применения. К династии ученых и педагогов Чупровых в России можно отнести его родных сестер: доктора естественных наук Женевского университета Ольгу Сперанскую (1898) и выпускницу физико-математического факультета МВЖК (1904) Марию Чупрову, сотрудницу научных лабораторий Московского университета и преподавателя ряда вузов Москвы [5].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. http://letopis.msu.ru/peoples/3204 (дата обращения 14.04.2025)

2. О. Б. Шейнин. А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка. Берлин М.: Янус-К. 2010. С.284

3. Н. С. Четвериков. А. А. Чупров (биография). Очерк. Архив РАН. Ф. 1650. Оп. 2. Д. 13. С.45.

4. Б. А. Мясоедов. А. А. Чупров. Продолжатель славной династии. Мир новой экономики. № 3. 2014. С. 116–121.

5. Е. О. Ермолаева, Н. В. Зеликин. О семье заслуженного профессора московского университета А. И. Чупрова. Сборник научных статей IV конгресса РОИФН. 2024. С. 809–813.

С. А. Докучаев, Г. С. Костецкая (Ростов-на-Дону)
galina.kostezkaya@gmail.com

Создание интерактивных учебных пособий на базе LMS Moodle

Развитие цифровых технологий требует использования новых подходов к обучению, включая онлайн-обучение. В этих условиях неизбежно происходит частичный перенос образовательного процесса в электронную среду, что невозможно без полноценного функционирования современной цифровой образовательной среды в вузе на базе современных систем управления обучением (Learning Management System, LMS), наиболее распространенной из которых является LMS Moodle.

Данная LMS не только обеспечивает педагогические условия для эффективного дистанционного обучения студентов и их оперативного взаимодействия с преподавателем посредством чата, анкетирования, тестирования, форумов, опросов, рабочих тетрадей, семинаров [1], но также является мощным инструментом для создания интерактивных учебных пособий по различным дисциплинам.

Интерактивное учебное пособие, разработанное на базе системы управления обучением Moodle, представляет собой модульный цифровой курс, ориентированный на активное вовлечение обучающихся в образовательный процесс. Его структура строится по принципу логической последовательности, обеспечивая удобную навигацию, поэтапное освоение материала и возможность самоконтроля.

Основу учебного пособия составляют тематические модули, каждый из которых соответствует отдельной теме курса. Модуль включает краткое описание, цели и ключевые вопросы, что помогает обучающимся понять, на что обратить внимание при изучении. Учебные материалы представлены в различных форматах: текстовые лекции, видеоматериалы, презентации, инфографика и ссылки на дополнительные ресурсы. Задачи инфографики, как образовательной технологии, заключаются в том, чтобы акцентировать внимание и улучшить качество восприятия передаваемого сообщения; повысить продуктивность обучения; сэкономить время для осознания и осмысления [2].

Особое внимание уделяется интерактивным элементам. В учебное пособие включаются тесты, мини-викторины, задания на сопоставление и перетаскивание, интерактивные презентации, выполненные с использованием плагина H5P. Это делает процесс обучения более наглядным, интересным и вовлекающим. Каждый модуль сопровождается практическими заданиями — индивидуальными и групповыми, направленными на применение полученных знаний. Обучающиеся могут загружать выполненные работы, получать обратную связь и оценку от преподавателя. Также предусмотрены элементы самоконтроля — промежуточные тесты и чек-листы, позволяющие учащимся самостоятельно оценивать свои успехи.

Таким образом, интерактивное учебное пособие на базе Moodle представляет собой гибкую и многофункциональную образовательную среду, способствующую глубокому усвоению материала и развитию самостоятельной учебной деятельности студентов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Ефимов С. В. О цифровых образовательных технологиях в образовательной экосистеме технического вуза. Труды СКФ МТУСИ. Международная научно-практическая конференция СКФ МТУСИ, Ростов-на-Дону. 2021, с. 363–365.

2. Докучаев С. А., Костецкая Г. С., Светличная Н. О., Колдынская Л. М. Современные средства визуализации учебного контента. Труды СКФ МТУСИ. Международная научно-практическая конференция СКФ МТУСИ, Ростов-на-Дону. 2021, с. 365–367.

Содержание